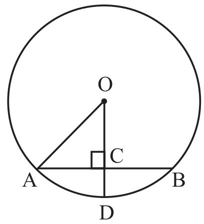
अध्याय
9

वृत्त
(Circles)

बहुविकल्पीय प्रश्न

1. सही विकल्प (A)

केन्द्र से जीवा पर डाला गया लंब जीवा को समद्विभाजित करता है।



$$AC = \frac{1}{2} \times AB = \frac{1}{2} \times 8 = 4 \text{ सेमी}$$

$$OC = \sqrt{OA^2 - AC^2}$$ (पाइथागोरस प्रमेय से)

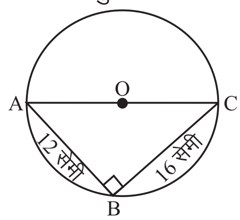
$$= \sqrt{5^2 - 4^2} = \sqrt{25 - 16} = \sqrt{9} = 3$$

अब, $CD = OD - OC$ [$\because$ $OD = OA$ = त्रिज्या]

$$= 5 \text{ सेमी} - 3 \text{ सेमी} = 2 \text{ सेमी}.$$

2. सही विकल्प (C)

AB, BC पर लंब है, इसलिए ΔABC एक समकोण त्रिभुज है।



समकोण त्रिभुज ABC में, हम जानते हैं

$$AC = \sqrt{AB^2 + BC^2}$$ (पाइथागोरस प्रमेय से)

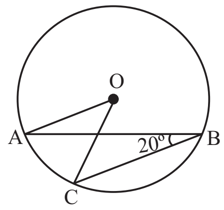
$$= \sqrt{12^2 + 16^2} = \sqrt{144 + 256} = \sqrt{400} = 20$$

इसलिए, $AC = 20$ सेमी

$$\text{त्रिज्या} = \frac{1}{2} \times 20 = 10 \text{ सेमी}.$$

3. सही विकल्प (B)

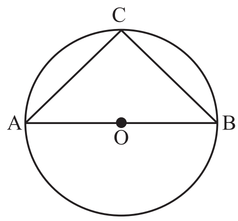
वृत्त का चाप AC केन्द्र O पर कोण AOC अन्तरित करता है और वृत्त का शेष भाग ABC, बिन्दु B पर अन्तरित करता है। चूँकि किसी चाप द्वारा केन्द्र पर बनाया गया कोण वृत्त के शेष भाग पर स्थित किसी बिन्दु पर बनाए गए कोण का दुगुना होता है।



$$\angle AOC = 2\angle ABC = 2 \times 20^\circ = 40^\circ.$$

4. सही विकल्प (D)

चूँकि AOB वृत्त का एक व्यास है।



$$\angle C = 90^\circ$$ [अर्द्धवृत्त में बना कोण 90° होता है]

अब,
$$AC = BC$$
$$\angle A = \angle B$$
[त्रिभुज की बराबर भुजाओं के सम्मुख कोण बराबर होते हैं।]

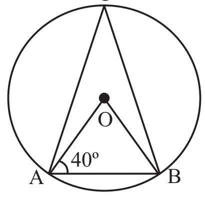
$$\angle A + \angle B + \angle C = 180^\circ$$ [त्रिभुज के कोण योग गुण के प्रयोग से]

$$\angle A + \angle A + 90^\circ = 180^\circ$$
$$2\angle A = 180^\circ - 90^\circ$$
$$A = \frac{90^\circ}{2} = 45^\circ.$$

5. सही विकल्प (A)

ΔOAB में,

$$OA = OB$$ (त्रिभुज की त्रिज्याएँ)



[त्रिभुज की बराबर भुजाओं के सम्मुख कोण बराबर होते हैं।]

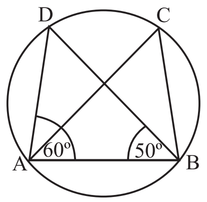
इसलिए,
$$\angle OAB = 180^\circ - (40^\circ + 40^\circ) = 100^\circ$$

चूँकि, केन्द्र पर एक वृत्त के चाप द्वारा अन्तरित कोण, वृत्त के शेष भाग पर किसी भी बिन्दु पर इसके द्वारा अन्तरित कोण हैं।

$$\angle ACB = \frac{1}{2}\ \angle AOB = \frac{1}{2} \times 100^\circ = 50^\circ.$$

6. सही विकल्प (C)

ΔABD में,



$$\angle A + \angle B + \angle D = 180^\circ$$

$\Rightarrow$ $$60^\circ + 50^\circ + \angle D = 180^\circ$$

$\Rightarrow$ $$\angle D = 180^\circ - 110^\circ = 70^\circ$$

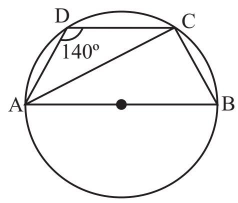
$$\angle ADB = 70^\circ$$

$$\angle ADB = \angle ACB = 70^\circ$$

[एक ही वृत्तखण्ड में बने कोण बराबर होते हैं]

7. सही विकल्प (B)

दिया है कि,



$$\angle ADC + \angle ABC = 180^\circ$$ (चक्रीय चतुर्भुज के सम्मुख कोणों का योग)

$$140^\circ + \angle ABC = 180^\circ$$

$$\angle ABC = 180^\circ - 140^\circ = 40^\circ$$

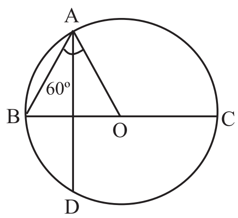
$ABCD$ एक चक्रीय चतुर्भुज इस प्रकार है कि AB वृत्त का व्यास है जो इसे परिचालित करता है।

अब, AC को मिलाया, $\angle C = 90^\circ$ [अर्द्धवृत्त में बना कोण समकोण होता है]

ΔABC में, $\angle BAC = 180^\circ - (90^\circ + 40^\circ) = 50^\circ.$

8. सही विकल्प (C)

ΔOAB में,



$OA = OB$ [समान वृत्त की त्रिज्याएँ]

$\angle ABO = \angle BAO$ [बराबर भुजाओं के सम्मुख कोण बराबर होते हैं।]

$\angle ABO = \angle BAO = 60^\circ$ [दिया है]

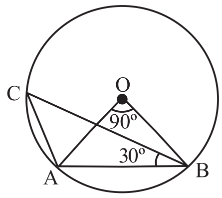
अब, $\angle ADC = \angle BAO = 60^\circ$ [एक ही वृत्त खंड में बने कोण बराबर होते हैं]

इसलिए $\angle ADC = 60^\circ$.

9. सही विकल्प (D)

OAB में, $OA = OB$ [वृत्त की समान त्रिज्याएँ]

$\angle OAB = \angle OBA$



$\angle OAB$ में,

$\angle OAB + \angle OBA + \angle AOB = 180^\circ$ [त्रिभुज के कोणों का योग 180° होता है।]

$2\angle OAB = 180^\circ - \angle AOB = 180^\circ - 90^\circ$

$\angle OAB = \frac{1}{2} \times 90^\circ = 45^\circ$

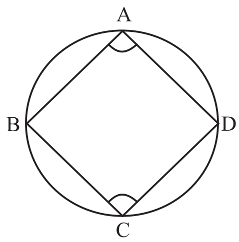
तथा $\angle ACB = \frac{1}{2} \angle AOB = \frac{1}{2} \times 90^\circ = 45^\circ$

अब ΔCAB में, $\angle CAB = 180^\circ - (\angle ABC + \angle ACB) = 180 - (30^\circ + 45^\circ) = 105^\circ$

अब, $\angle CAO = \angle CAB - \angle OAB$

$\angle CAO = 105^\circ - 45^\circ = 60^\circ$.

10. $\because$ हम जानते हैं कि चक्रीय चतुर्भुज के सम्मुख कोणों का योग 180° होता है।



$\therefore$ $\angle A + \angle C = 180^\circ$

$\Rightarrow$ $2x + 40 + 3x + 20 = 180^\circ$

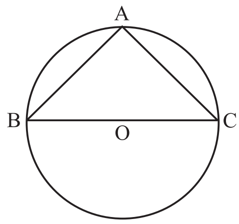
$\Rightarrow$ $5x = 120^\circ \Rightarrow x = 24^\circ$

अब $\angle A = 2x + 40^\circ = 2 \times 24^\circ + 40^\circ = 88^\circ$

अतः विकल्प (A) सही है। **उत्तर**

11. चूँकि ये सत्य है कि अर्द्धवृत्त में बना कोण 90° होता है, अर्थात् $\angle A = 90°$

$\angle B = 45°$ (दिया है)



तब $\angle A + \angle B + \angle C = 180°$ (त्रिभुज के कोण योग नियम से)

$\Rightarrow$ $\angle A + \angle C = 180° - \angle B = 180° - 45° = 135°$

अत: विकल्प (D) सही है। **उत्तर**

12. यहाँ $\overset{\frown}{AB} = \overset{\frown}{BC} = \overset{\frown}{CA}$

अर्थात् जीवा AB = जीवा BC = जीवा CA

$\therefore$ ABC एक समबाहु त्रिभुज है, अत: विकल्प (A) है। **उत्तर**

13. एक समबाहु त्रिभुज में, केन्द्रक उसके परिकेन्द्र के साथ संपाती होता है

$\therefore$ $GA = GB = GC = 20$ मी.

अत: विकल्प (C) सही है। **उत्तर**

14. $\because$ त्रिभुज का केन्द्रक माध्यिका को 2 : 1 के अनुपात में विभाजित करता है।

$\therefore$ $\frac{GA}{GD} = \frac{2}{1} \Rightarrow \frac{20}{GD} = \frac{2}{1}$

$\Rightarrow$ $2GD = 20 \Rightarrow GD = 10$ मी

अत: विकल्प (B) सही है। **उत्तर**

15. समकोण ΔBDG में,

$(BG)^2 = (BD)^2 + (GD)^2$

$\Rightarrow$ $(20)^2 = (BD)^2 + (10)^2$

$\Rightarrow$ $BD = \sqrt{400 - 100} = \sqrt{300} = 10\sqrt{3}$ मी.

अत: विकल्प (D) सही है। **उत्तर**

16. $BC = 2 \times BD = 2 \times 10\sqrt{3}$

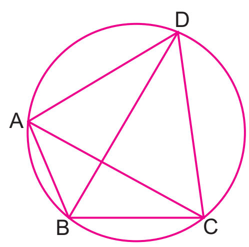
$= 20\sqrt{3}$ मी

अत: विकल्प (B) सही है। **उत्तर**

वर्णनात्मक प्रश्न

अति लघु उत्तरीय प्रश्न :

1. $\angle CAD = \angle DBC = 55°$ (एक ही वृत्तखण्ड के कोण)



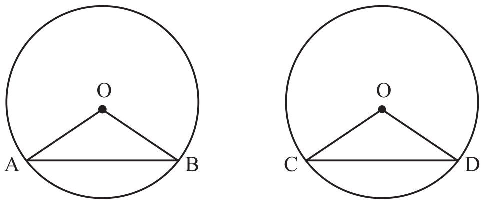
अतः $\angle DAB = \angle CAD + \angle BAC$

$= 55° + 45° = 100°$

परन्तु $\angle DAB + \angle BCD = 180°$ (चक्रीय चतुर्भुज के सम्मुख कोण)

इसलिए $\angle BCD = 180° - 100° = 80°$. **उत्तर**

2. दिया है : दो सर्वांगसम वृत्तों की जीवायें बराबर हैं, अर्थात् $AB = CD$.



सिद्ध करना है : $\angle AOB = \angle COD$

उपपत्ति : ΔAOB तथा ΔCOD में,

$AO = CO$ (वृत्तों की समान त्रिज्याएँ)

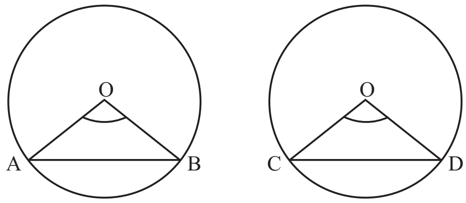
$BO = DO$ (वृत्तों की समान त्रिज्याएँ)

तथा $AB = CD$ (दिया है)

$\therefore$ $\Delta AOB \cong \Delta COD$ ($\because$ SSS प्रमेय से)

$\Rightarrow$ $\angle AOB = \angle COD$.

3. दिया है : AB तथा CD दो इस प्रकार की जीवाएँ हैं कि इनके द्वारा वृत्त के केन्द्र पर अंतरित कोण बराबर हैं।



अर्थात् $\angle AOB = \angle COD$.

सिद्ध करना है : $AB = CD$.

उपपत्ति : ΔAOB तथा ΔCOD में,

$AO = CO$ (समान त्रिज्यायें)

$BO = DO$ (समान त्रिज्यायें)

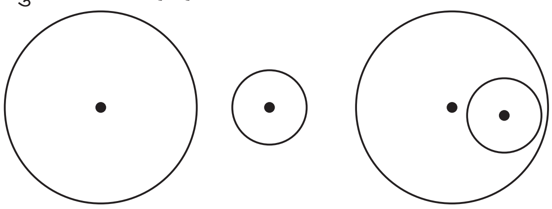
तथा $\angle AOB = \angle COD$. (दिया है)

$\therefore$ SAS प्रगुण से, $\Delta AOB \cong \Delta COD$.

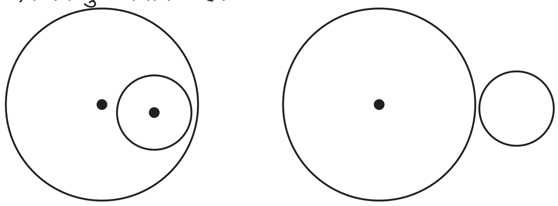
$AB = CD$. (सर्वांगसम त्रिभुजों के संगत भाग)

4. प्रश्न के निर्देश के अनुसार नीचे विभिन्न वृत्तों के युग्म खींचे जा सकते हैं :

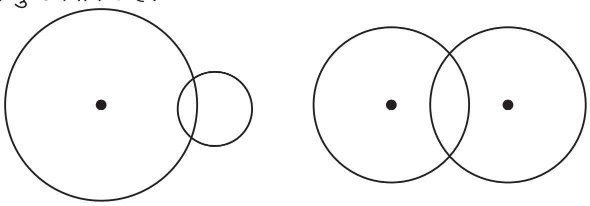
(i) दोनों युग्मों में से कोई बिन्दु उभयनिष्ठ नहीं है।



(ii) दोनों युग्मों में से केवल एक बिन्दु उभयनिष्ठ है।

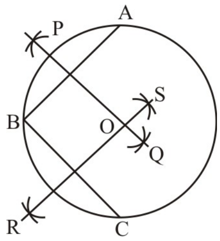


(iii) प्रत्येक युग्म में दो बिन्दु उभयनिष्ठ हैं।



5. रचना के पद :

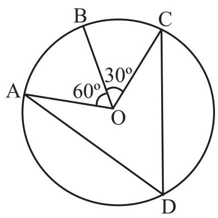
1. तीन बिन्दु A, B तथा C (वृत्त की परिधि पर) लें।



2. AB तथा BC को मिलाएँ।

3. AB तथा BC के लम्ब समद्विभाजक PQ तथा RS खींचे जो कि एक–दूसरे को O पर प्रतिच्छेद करते हैं। तब O वृत्त का केन्द्र है।

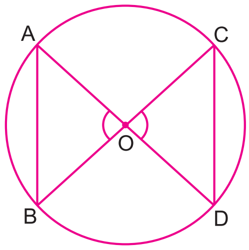
6. $\because$ एक वृत्त के केन्द्र पर चाप ABC द्वारा $\angle AOC = \angle AOB + \angle BOC = 60^\circ + 30^\circ = 90^\circ$ तथा $\angle ADC$ वृत्त के बचे हुए भाग के एक बिन्दु पर बनता है।



$$\angle ADC = \frac{1}{2}(\angle AOC) = \frac{1}{2} \times 90^\circ = 45^\circ.$$

लघु उत्तरीय प्रश्न : (प्रत्येक 4 अंक)

1. माना O केन्द्र वाले वृत्त की दो जीवाएँ $AB = CD$, (दिया है)



सिद्ध करना है : $\angle AOB = \angle COD$

उपपत्ति : ΔOAB तथा OCD में,

$AB = CD$ (दिया है)

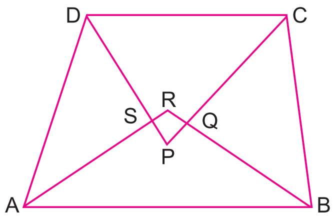
$OA = OD$ (वृत्त की त्रिज्याएँ)

तथा $OB = OC$ (वृत्त की त्रिज्याएँ)

अतः $\Delta OAB \cong \Delta OCD$

अतः $\angle AOB = \angle COD$.

2. $ABCD$ कोई चतुर्भुज है। चतुर्भुज के $\angle DAB$, $\angle ABC$, $\angle BCD$ और $\angle CDA$ के अर्द्धक क्रमानुसार AS, BR, CQ तथा DP से चतुर्भुज $PQRS$ बनता है।



सिद्ध करना है : $PQRS$ चक्रीय चतुर्भुज होगा।

उपपत्ति : $\because$ $\angle DAS + \angle ADS = 2$ समकोण $- \angle DSA$

परन्तु $\angle DSA = \angle RSP$ (शीर्षाभिमुख कोण)

तथा $\angle QBC + \angle BCQ = 2$ समकोण $- \angle CQB$

परन्तु $\angle CQB = \angle PQR$ (शीर्षाभिमुख कोण)

$\therefore$ $\angle RSP + \angle PQR = \angle DSA + \angle CQB = 4$ समकोण $- \angle DAS - \angle ADS - \angle QBC - \angle BCQ$

$= 4$ समकोण $- \frac{1}{2}(\angle DAB + \angle CDA + \angle ABC + \angle BCD)$

$= 4$ समकोण $- \frac{1}{2}(4$ समकोण$)$

$= 2$ समकोण

अतः $PQRS$ चक्रीय चतुर्भुज है।

3. ΔCOD में, $CO = OD = CD = r$ त्रिज्या (दिया है)

$\therefore$ ΔCOD एक समबाहु त्रिभुज है।

$\therefore$ $\angle COD = 60°$, जो अचर है।

$\angle ACB = 90°$, (अर्द्धवृत्त में बना कोण समकोण होता है)

$\angle BCA + \angle BCP = 180°$ (रैखिक युग्म)

$90° + \angle BCP = 180°$

या $\angle BCP = 180° - 90° = 90°$

और $\angle CBD = \frac{1}{2}\angle COD$ (प्रमेय से)

$= \frac{1}{2} \times 60° = 30° = \angle CBP$

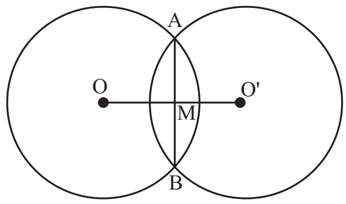
अब ΔBCP से, $\angle BCP + \angle CBP + \angle BPC = 180°$

$$90° + 30° + \angle BPC = 180°$$
$$120° + \angle BPC = 180°$$
$$\angle BPC = 180° - 120° = 60°$$

अर्थात् $\angle APB = \angle PBC = 60°$. **उत्तर**

4. दिया है : चित्र में दो वृत्त जिनके केन्द्र क्रमशः O तथा O' जो A तथा B बिन्दुओं पर प्रतिच्छेद करते हैं।

सिद्ध करना है : OO' जीवा AB का लम्ब समद्विभाजक है।



उपपत्ति : हम जानते हैं कि एक जीवा के मध्य बिन्दु तथा केन्द्र से जाने वाली रेखा जीवा पर लम्ब होती है।

$$\angle OMA = 90°$$

$\therefore$ $\angle O'MA = 90°$

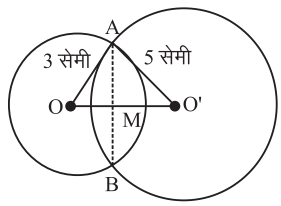
अब, $\angle OMA + \angle O'MA = 180°$

लेकिन ये रैखिक युग्म बनाते हैं।

अतः OMO', एक सरल रेखा है।

अतः OO', जीवा AB का लम्ब समद्विभाजक है।

5. दिया है : दो वृत्त जिनकी त्रिज्यायें 5 सेमी तथा 3 सेमी हैं एक–दूसरे को A व B बिन्दु पर प्रतिच्छेदित करते हैं तथा $OO' = 4$ सेमी है, जहाँ O व O' उन वृत्तों के केन्द्र हैं।



ज्ञात करना है : उभयनिष्ठ जीवा की लम्बाई AB.

$\because$ $\Delta OAO'$ से

$$(AO') + (OO')^2 = 3^2 + 4^2 = 25$$

अर्थात् $OA^2 = (O'A)^2 + (OO')^2$

अतः $\Delta OAO'$ समकोण त्रिभुज है।

$\therefore$ $\Delta OO'A$ का क्षेत्रफल $= \frac{1}{2} \times O'A \times OO' = \frac{1}{2} \times 3 \times 4 = 6$ वर्ग इकाई

और $\Delta OO'A$ का क्षेत्रफल $= \frac{1}{2} \times OO' \times AM$

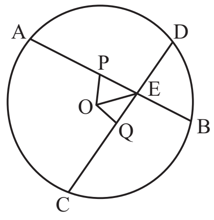
$\therefore$ $6 = \frac{1}{2} \times 4 \times AM$

या $AM = 3$

∴ $AB = 2AM = 2 \times 3 = 6$ सेमी

उभयनिष्ठ जीवा की लम्बाई = 6 सेमी। **उत्तर**

6. दिया है : AB तथा CD वृत्त की जीवायें हैं, O वृत्त का केन्द्र है। AB तथा CD, E पर प्रतिच्छेदित करती हैं और $AB = CD$.



सिद्ध करना है : $\angle OEA = \angle OEC$.

रचना : $OP \perp AB$ तथा $OQ \perp CD$ खींचा।

उपपत्ति : ΔOPE तथा ΔOQE में,

$OE = OE$, (उभयनिष्ठ)

$OP = OQ$,

(एक ही वृत्त की समान जीवायें केन्द्र से समान दूरी पर स्थित होती हैं।)

$\angle OPE = \angle OQE$, (प्रत्येक 90°)

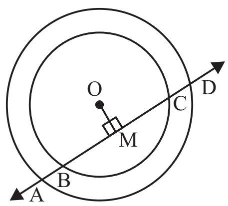
अतः $\Delta OPE \cong \Delta OQE$ (RHS सर्वांगसम नियम द्वारा)

इसी प्रकार, $\angle OEP = \angle OEQ$

अर्थात् $\angle OEA = \angle OEC$. (सर्वांगसम त्रिभुजों के संगत भाग)

इति सिद्धम्।

7. दिया है : दो संकेन्द्री वृत्त जिनका केन्द्र O है, एक रेखा इन वृत्तों को A, B, C व D बिन्दुओं पर काटती है।



सिद्ध करना है : $AB = CD$.

रचना : $OM \perp BC$ खींचा।

उपपत्ति : चूँकि BC छोटे वृत्त की जीवा है तथा $OM \perp BC$

$BM = CM$ ...(i)

(केन्द्र से खींचा गया लम्ब जीवा को समद्विभाजित करता है।)

पुनः AD बड़े वृत्त की जीवा है तथा $OM \perp AD$.

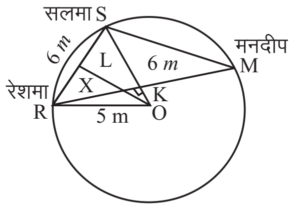
∴ $AM = DM$ ...(ii)

समीकरण (i) से (ii) को घटाने पर,

$$AM - BM = DM - CM$$

अतः $AB = CD$. **इति सिद्धम्।**

8. चित्रानुसार वृत्त खींचा।



माना रेशमा, सलमा तथा मनदीप की स्थिति R, S तथा M है। $OL \perp RS$ खींचा। अब OS को मिलाया जो RM को K पर काटता है।

माना $KR = x$ मीटर।

$$\text{क्षेत्रफल } (\Delta ORS) = \frac{1}{2} \times OS \times RK = \frac{1}{2} \times 5 \times x$$

तथा $$\text{क्षेत्रफल (ORS)} = \frac{1}{2} \times RS \times OL = \frac{1}{2} \times 6 \times 4 = 12$$

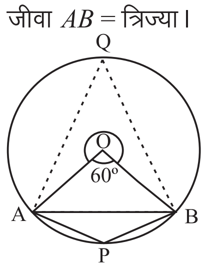
(समकोण, ΔOLR में, $OL = \sqrt{5^2 - 3^2} = 4$)

$$\frac{5}{2}x = 12$$

$$x = \frac{24}{5} = 4.8 \text{ मीटर।}$$

अतः रेशमा तथा मनदीप के बीच दूरी $= 2x = 2 \times 4.8 = 9.6$ मीटर। **उत्तर**

9. दिया है : एक वृत्त जिसका केन्द्र O है तथा जीवा AB = त्रिज्या।



ज्ञात करना है : $\angle APB$ तथा $\angle AQB$,

ΔAOB में, $OA = OB = AB$

$\therefore$ ΔAOB एक समबाहु त्रिभुज है।

$\therefore$ $\angle AOB = 60^\circ$

वृहत् चाप AQB के लिए जीवा AB केन्द्र पर $\angle AOB = 60^\circ$ का कोण बनाती है तथा $\angle AQB$ परिधि का दूसरा भाग है, तब

$$\angle AQB = \frac{1}{2} \times \angle AOB = \frac{1}{2} \times 60^\circ = 30^\circ$$

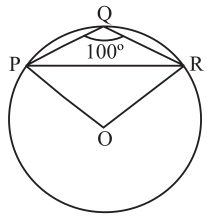
इसी प्रकार, $$\angle APB = \frac{1}{2} \times \text{वृहत् } \angle AOB$$

$$= \frac{1}{2}(360^\circ - 60^\circ)$$

$$= \frac{1}{2} \times 300^\circ = 150^\circ$$

तथा $\angle AQB = 30^\circ$. **उत्तर**

10. एक चाप द्वारा वृत्त के केन्द्र पर बनाया गया कोण, उसी चाप द्वारा बनाई गई परिधि के किसी बिन्दु पर बने कोण का दोगुना होता है।



वृहत $\angle PQR = 2\angle PQR = 2 \times 100 = 200°$

लघु $\angle POR = 360° - 200° = 160°$

$OP = OR$ (एक ही वृत्त की त्रिज्यायें)

$\angle OPR = \angle ORP,$ (बराबर भुजाओं के सम्मुख कोण बराबर होते हैं)

अब $\angle OPR + \angle OPR + \angle POR = 180°$

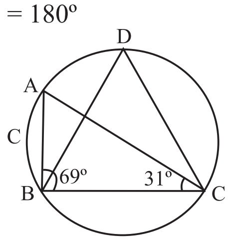
या $2\angle OPR + 160° = 180°$

या $2\angle OPR = 20°$

अतः $\angle OPR = 10°.$ **उत्तर**

11. ΔABC में,

$\angle A + \angle ABC + \angle ACB = 180°$ [Δ के कोण]



लेकिन $\angle ABC = 69°$

तथा $\angle ACB = 31°$ (दिया है)

$\angle A + 69° + 31° = 180°$

$\therefore$ $\angle A + 100° = 180°$

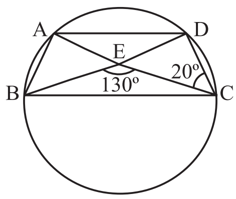
या, $\angle A = 180° - 100°$

$\angle A = 80°$

$\angle A = \angle D,$ (एक ही वृत्तखण्ड के कोण बराबर होते हैं)

अतः $\angle D = 80°.$ **उत्तर**

12. आकृति के अनुसार,



$\angle CED + \angle BEC = 180°$ (रैखिक युग्म)

$\Rightarrow$ $\angle CED + 130° = 180°$

$\Rightarrow$ $\angle CED = 180° - 130°$

$\Rightarrow$ $\angle CED = 50^\circ$ ...(i)

$\angle AEB = \angle CED$ (शीर्षाभिमुख कोण)

$\Rightarrow$ $\angle AEB = 50^\circ$ [(i) का प्रयोग करने पर]

अब $\angle ABD = \angle ACD$

[क्योंकि चाप AD द्वारा एक ही वृत्तखण्ड में अंतरित कोण बराबर होते हैं।]

$\Rightarrow$ $\angle ABD = 20^\circ$ [$\because$ $\angle ACD = 20^\circ$ (दिया है)]

अब ΔAEB में,

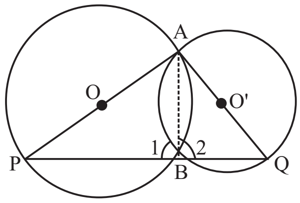
$\angle BAE + \angle ABE + \angle AEB = 180^\circ$ [त्रिभुज का कोण योग गुण]

$\Rightarrow$ $\angle BAE + 20^\circ + 50^\circ = 180^\circ$

$\Rightarrow$ $\angle BAE = 180^\circ - 20^\circ - 50^\circ = 110^\circ$

या $\angle BAC = 110^\circ$. **उत्तर**

13. दिया है : दो वृत्त एक–दूसरे को बिन्दुओं A और B पर प्रतिच्छेद करते हैं। AP और AQ उनके व्यास हैं।



सिद्ध करना है : बिन्दु B, तीसरी भुजा PQ पर स्थित हैं।

रचना : A और B को मिलाइए।

उपपत्ति : AP व्यास है।

$\therefore$ $\angle 1 = 90^\circ$ (अर्धवृत्त का कोण)

साथ ही, AQ व्यास है।

$\therefore$ $\angle 2 = 90^\circ$ (अर्धवृत्त का कोण)

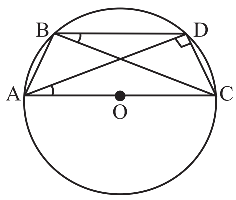
$\angle 1 + \angle 2 = 90^\circ + 90^\circ$

$\Rightarrow$ $\angle PBQ = 180^\circ$

$\Rightarrow$ PBQ एक सरल रेखा है।

अतः, B अर्थात् इन वृत्तों का प्रतिच्छेद बिन्दु तीसरी भुजा अर्थात् PQ पर स्थित है।

14. दिया है कि दो समकोण त्रिभुज ABC और ADC जिनमें B और D क्रमशः समकोण हैं।



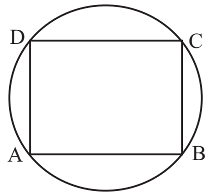
यदि हम AC (उभनिष्ठ कर्ण) व्यास लेकर एक वृत्त खींचें तो यह निश्चित रूप से बिन्दुओं B और D में से होकर जाएगा।

(क्योंकि B और D वे बिन्दु हैं जो चाप AC के एकान्तर खण्डों में हैं।)

अब, $\overset{\frown}{CD}$ एक ही वृत्तखण्ड में $\angle CBD$ और $\angle CAD$ अंतरित करती है।

$\therefore$ $\angle CAD = \angle CBD$. **इति सिद्धम।**

15. मान लीजिए $ABCD$ एक चक्रीय समान्तर चतुर्भुज है। यह सिद्ध करने के लिए यह एक आयत है इतना ही सिद्ध करना पर्याप्त है कि समान्तर चतुर्भुज का एक कोण समकोण है। अब, $ABCD$ एक समान्तर चतुर्भुज है।



$\Rightarrow$ $\angle B = \angle D$ ...(i)

(क्योंकि समान्तर चतुर्भुज के सम्मुख कोण बराबर होते हैं।)

साथ ही, $ABCD$ एक चक्रीय चतुर्भुज है।

$\Rightarrow$ $\angle B + \angle D = 180^\circ$ ...(ii)

(i) और (ii) से हमें प्राप्त होता है :

$$\angle B + \angle B = 180^\circ$$

$\Rightarrow$ $2\angle B = 180^\circ$

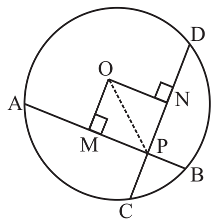
$\Rightarrow$ $\angle B = 90^\circ$

इसलिए, $\angle B = \angle D = 90^\circ$

अतः $ABCD$ एक आयत है। **इति सिद्धम्।**

दीर्घ उत्तरीय प्रश्न : (प्रत्येक 6 अंक)

1. दिया है : AB तथा CD वृत्त की जीवाएँ हैं, O वृत्त का केन्द्र है। AB तथा CD, P पर प्रतिच्छेद करते हैं और $AB = CD$.



सिद्ध करना है : (i) $AP = PD$ (ii) $PB = CP$.

रचना : OM ⊥ AB, ON ⊥ CD खींचें।

OP को मिलाया।

उपपत्ति : $AM = MB = \frac{1}{2}AB$.

($\because$ केन्द्र से जीवा पर खींचा गया लम्ब जीवा को समद्विभाजित करता है)

$CN = ND = \frac{1}{2}CD$,

($\because$ केन्द्र से जीवा पर खींचा गया लम्ब जीवा को समद्विभाजित करता है)

$AM = ND$ तथा $MB = CN$ ...(1)

[$\because AB = CD$ (दिया है)]

ΔOMP तथा ΔONP में,

$OM = ON$

[$\because$ एक वृत्त की समान जीवाएँ केन्द्र से समान दूरी पर स्थित होती हैं)

$$\Delta OMP = \angle ONP \qquad (\because \text{ प्रत्येक } 90^\circ)$$

$$OP = OP \qquad \text{(उभयनिष्ठ)}$$

सर्वांगमस गुणधर्म RHS से,

$$\Delta OMP \cong \Delta ONP$$

$$\Rightarrow \qquad MP = PN \qquad \text{[सर्वांगसम त्रिभुजों के संगत भाग] ...(2)}$$

समीकरण (1) तथा (2) को जोड़ने पर,

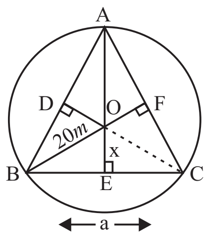
$$AM + MP = ND + PN \Rightarrow AP = PD$$

समीकरण (1) में से समी (2) को घटाने पर,

$$BM - MP = CN - PN \Rightarrow PB = CP$$

अतः (i) $AP = PD$ और (ii) $PB = CP$. **इति सिद्धम्।**

2. माना कि तीनों लड़कों अंकुर, सैयद तथा डेविड की स्थिति को बिन्दुओं, *A*, *B* और *C* से दर्शाया गया है। तीनों बिन्दु समान दूरी पर हैं।



$$\therefore \qquad AB = BC = AC = a \text{ मीटर} \qquad \text{(माना)}$$

$\because$ समबाहु त्रिभुज की समान भुजाएँ वृत्त की समान जीवाएँ हैं और वृत्त की समान जीवाएँ केन्द्र से समदूरस्थ होती हैं।

$$\therefore \qquad OD = OE = OF = x \text{ मीटर} \qquad \text{(माना)}$$

OA, *OB* और *OC* को मिलाइए।

अब हमारे पास तीन सर्वांगसम त्रिभुज हैं।

ΔOAB, ΔOBC और ΔAOC की दशा,

$$ar(\Delta AOB) = ar(\Delta BOC) = ar(\Delta AOC) \qquad \text{...(i)}$$

अब, *a* भुजा वाले समबाहु ΔABC का क्षेत्रफल

$$= ar(\Delta AOB) + ar(\Delta BOC) + ar(\Delta AOC) \qquad \text{...(ii)}$$

$$ar(\Delta ABC) = 3ar(\Delta BOC) \qquad \text{[समीकरण (i) व (ii) के अनुसार]}$$

$$\Rightarrow \qquad \frac{\sqrt{3}}{4}a^2 = 3\left(\frac{1}{2}BC \times OE\right)$$

$$\Rightarrow \qquad \frac{\sqrt{3}}{4}a^2 = 3\left(\frac{1}{2} \times a \times x\right)$$

$$\Rightarrow \qquad \frac{a^2}{a} = 3 \times \frac{1}{2} \times \frac{4}{\sqrt{3}} \times x$$

$$\Rightarrow \qquad a = 2\sqrt{3}x \qquad \text{...(iii)}$$

$$\Rightarrow \qquad OE \perp BC$$

$$\therefore \qquad BE = EC = \frac{1}{2}BC$$

[क्योंकि केन्द्र से खींचा गया लम्ब जीवा को समद्विभाजित करता है।]

$\Rightarrow \quad BE = EC = \frac{1}{2}a$

$\Rightarrow \quad BE = EC = \frac{1}{2}(2\sqrt{3}x)$ [समीकरण (iii) के अनुसार]

$\Rightarrow \quad BE = EC = \sqrt{3}x$

अब, समकोण ΔBEO में,

$OE^2 + BE^2 = OB^2$ (पाइथागोरस प्रमेय के अनुसार)

$\Rightarrow \quad x^2 + (\sqrt{3}x)^2 = 20^2$

$\Rightarrow \quad 4x^2 = 400$

$\Rightarrow \quad x^2 = \frac{400}{4} = 100$

$\Rightarrow \quad x = \sqrt{100} = 10$ m ...(iv)

समीकरण (iii) के आधार पर

$a = 2\sqrt{3}x$

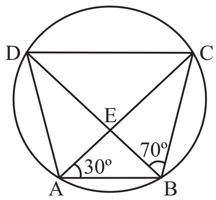
$\Rightarrow \quad a = 2\sqrt{3} \times 10$ मीटर [(iv) का प्रयोग करने पर]

$\Rightarrow \quad a = 20\sqrt{3}$ मी

अतः किन्हीं दो लड़कों के बीच की दूरी $20\sqrt{3}$ मीटर है। **उत्तर**

3. $\angle BDC = \angle BAC$ [एक ही वृत्तखण्ड के कोण]

$\Rightarrow \quad \angle BDC = 30^\circ$ $(\because \angle BAC = 30^\circ)$



ΔBCD में,

$\angle BCD + \angle DBC + \angle BDC = 180^\circ$

$\Rightarrow \quad \angle BCD + 70^\circ + 30^\circ = 180^\circ$ $[\because \angle DBC = 70^\circ]$

$\Rightarrow \quad \angle BCD = 180^\circ - 70^\circ - 30^\circ$

$\Rightarrow \quad \angle BCD = 80^\circ$ ...(i)

यदि $AB = BC$

तो ΔABC में,

$\angle ACB = \angle BAC$

(क्योंकि त्रिभुज की बराबर भुजाओं के सम्मुख कोण बराबर होते हैं।)

$\angle ACB = 30^\circ$

$\Rightarrow \quad \angle BCD = \angle ACB + \angle ACD$

$80^\circ = 30^\circ + \angle ACD$ [समीकरण (i) और (ii) के अनुसार]

$\Rightarrow$ $80^\circ - 30^\circ = \angle ACD$

$50^\circ = \angle ACD$

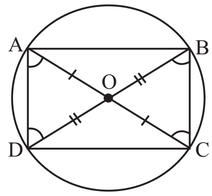
या, $\angle ACD = 50^\circ$

या, $\angle ECD = 50^\circ$. **उत्तर**

4. AC एक व्यास है।

$\therefore$ $\angle B = \angle D = 90^\circ$ ...(i)

(क्योंकि अर्धवृत्त में कोण समकोण होता है)



इसी प्रकार BD व्यास है।

$\therefore$ $\angle A = \angle C = 90^\circ$ ...(ii)

अब, व्यास $AC = BD$

$\Rightarrow$ $\overset{\frown}{AC} \cong \overset{\frown}{BD}$ (बराबर जीवाओं की सम्मुख चापें)

$\Rightarrow$ $\overset{\frown}{AC} - \overset{\frown}{DC} \cong \overset{\frown}{BD} - \overset{\frown}{DC}$

$\Rightarrow$ $\overset{\frown}{AD} \cong \overset{\frown}{BC}$

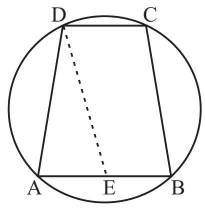
$\Rightarrow$ $AD = BC$ (बराबर जीवाओं की सम्मुख जीवाएँ) ...(iii)

इसी प्रकार $AB = DC$ ...(iv)

समीकरण (i), (ii), (iii) व (iv) के आधार पर हम देखते हैं कि चतुर्भुज का प्रत्येक कोण 90° का है और सम्मुख भुजाएँ बराबर हैं।

अतः $ABCD$ एक आयत है। **इति सिद्धम्।**

5. **दिया है :** एक समलम्ब $ABCD$ जिसमें $AB \parallel CD$ और $AD = BC$ है।



सिद्ध करना है : बिन्दु A, B, C, D चक्रीय हैं। (अर्थात् $ABCD$ चक्रीय समलम्ब है)

रचना : $DE \parallel CB$ खींचिए।

उपपत्ति : $DE \parallel CB$ और $EB \parallel DC$.

$\therefore$ $EBCD$ एक समान्तर चतुर्भुज है।

$\therefore$ $DE = CB$ और $\angle DEB = \angle DCB$.

$\therefore$ समान्तर चतुर्भुज के सम्मुख कोण बराबर होते हैं।

अब $\because$ $AD = BC$ और $BC = DE$

$DA = DE \Rightarrow \angle DAE = \angle DEA.$

[क्योंकि त्रिभुज की बराबर भुजाओं के सम्मुख कोण बराबर होते हैं।]

परन्तु $\angle DEA + \angle DEB = 180°$ (रैखिक युग्म)

$\Rightarrow$ $\angle DAE + \angle DCB = 180°$

[$\because$ $\angle DEA = \angle DAE$ और $\angle DEB = \angle DCB$] (ऊपर प्रमाणित)

$\Rightarrow$ $\angle DAB + \angle DCB = 180°$

$\Rightarrow$ $\angle A + \angle C = 180°$ ...(i)

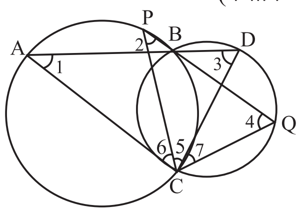
अतः $ABCD$ एक चक्रीय चतुर्भुज है।

[$\because$ चक्रीय चतुर्भुज के सम्मुख कोण संपूरक होते हैं जैसा कि परिणाम (i) है।]

6. वृत्त I की चाप एक ही वृत्तखण्ड में $\angle 1$ और $\angle 2$ अतंरित करती है।

$$\angle 1 = \angle 2$$

(क्योंकि एक ही वृत्तखण्ड के कोण बराबर होते है।)



चाप BC वृत्त II के एक ही वृत्तखण्ड में $\angle 3$ और $\angle 4$ अंतरित करती है।

$\therefore$ $\angle 3 = \angle 4$

अब ΔACD में,

$\therefore$ $\angle A + \angle C + \angle D = 180°$ (त्रिभुज के कोण योग गुणधर्म के अनुसार)

$\Rightarrow$ $\angle 1 + \angle 5 + \angle 6 + \angle 3 = 180°$ ...(i)

$\angle PCQ$ में,

$\angle P + \angle C + \angle Q = 180°$ (त्रिभुज के कोण योग गुणधर्म के अनुसार)

$\Rightarrow$ $\angle 2 + \angle 5 + \angle 7 + \angle 4 = 180°$ ...(ii)

(i) और (ii) से,

$\angle 1 + \angle 5 + \angle 6 + \angle 3 = \angle 2 + \angle 5 + \angle 7 + \angle 4$ ...(iii)

परन्तु $\angle 1 = \angle 2$ और $\angle 3 = \angle 4$ (हम सिद्ध कर चुके हैं)

$\therefore$ (iii) के आधार पर

$$\angle 1 + \angle 5 + \angle 6 + \angle 3 = \angle 1 + \angle 5 + \angle 7 + \angle 3$$

$\Rightarrow$ $\angle 6 = \angle 7$

या $\angle ACP = \angle QCD.$ **इति सिद्धम्।**