अध्याय
8

चतुर्भुज
(Quadrilaterals)

बहुविकल्पीय प्रश्न

1. सही विकल्प (C)

PQRS के विकर्ण परस्पर लम्ब होंगे।

2. सही विकल्प (D)

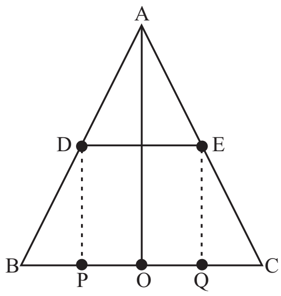
PQRS के विकर्ण बराबर हों।

3. सही विकल्प (B)

आकृति एक आयत होगी।

4. सही विकल्प (D)

चूँकि, एक त्रिभुज की किन्हीं दो भुजाओं के मध्य बिन्दुओं को मिलाने वाली रेखाखण्ड तीसरी भुजा के समान्तर होता है तथा उसका आधा होता है।



DE || BC

इसलिए,

इसी प्रकार, DP || AO और EQ || AO

DP || EQ [DP || AO और EQ || AO]

अब, DEQP एक ऐसा चतुर्भुज है जिसकी सम्मुख भुजाओं का एक युग्म बराबर और समान्तर है।

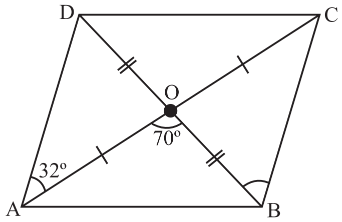
इसलिए, चतुर्भुज *DEQP* एक समांतर चतुर्भुज है।

5. विकल्प (C)

यदि *ABCD* के विकर्ण बराबर और परस्पर लम्ब हों, तभी यह स्थिति बनेगी।

6. सही विकल्प (C)

AD, *BC* के समांतर है और *AC* एक तिर्यक रेखा है।



$\angle DAC = \angle ACB$ [एकान्तर अन्त: कोण)

$\angle DAC = 32^\circ$

$\angle ACB = \angle DAC = 32^\circ$

ΔBOC में,

बाह्य $\angle BOA = \angle OCB + \angle OBC$ [बाह्य कोण प्रमेय द्वारा]

$70^\circ = 32^\circ + \angle OBC$ [$\because \angle OCB = \angle ACB$]

$\angle OBC = 70^\circ - 32^\circ = 38^\circ \Rightarrow \angle DBC = \angle OBC = 38^\circ$.

7. चतुर्भुज के कोणों में अनुपात = 4 : 6 : 8 : 12

माना चतुर्भुज का प्रत्येक कोण क्रमश: $4x$, $6x$, $8x$ तथा $12x$ हो, तब चतुर्भुज के कोण योग नियम से,

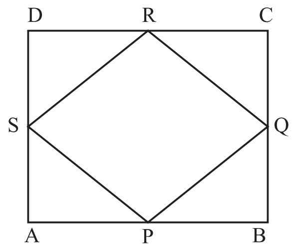
$$4x + 6x + 8x + 12x = 360^\circ$$

$$30x = 360^\circ \Rightarrow x = 12$$

अब चतुर्भुज का सबसे बड़ा कोण = $12 \times 12 = 144^\circ$

अत: विकल्प (A) सही है। **उत्तर**

8. दिया गया ΔPQR है, जिसमें PQ का मध्य बिन्दु S तथा PR का मध्य बिन्दु T है। यहाँ S तथा T को मिलाया।



$\therefore$ मध्य बिन्दु प्रमेय से $ST \parallel QR$ और $ST = \frac{1}{2} QR = \frac{1}{2} \times 16 = 8$ सेमी।

अत: विकल्प (A) सही है। **उत्तर**

9. सर्वप्रथम एक कागज लीजिए, उस पर एक चतुर्भुज $ABCD$ बनाइए। अब इनकी भुजाओं AB, BC, CD तथा DA के मध्य बिन्दुओं P, Q, R तथा S को मिलाइए। तब समान्तर चतुर्भुज PQRS प्राप्त हुआ।

अत: विकल्प (C) सही है। **उत्तर**

10. $\angle RSP = \angle RQP$ ($\because$ समान्तर चतुर्भुज के आमने–सामने के कोण बराबर होते हैं।)

$\therefore$ $\angle RQP = \angle RSP = 80^\circ$.

अत: विकल्प (B) सही है। **उत्तर**

11. $\angle RSP + \angle SPQ = 180^\circ$(एकान्तर अन्त: कोण)

$\Rightarrow$ $80^\circ + \angle SPQ = 180^\circ \Rightarrow \angle SPQ = 100^\circ$

अत: विकल्प (A) सही है। **उत्तर**

12. $\because$ $PQRS$ एक समान्तर चतुर्भुज दिया है।

$\therefore$ इसके आमने–सामने की भुजाएँ बराबर होंगी।

अर्थात् $SP = RQ = 3$ सेमी

अतः विकल्प (D) सही है। **उत्तर**

13. दिए गए विकल्पों में, A, B तथा C तीनों सत्य हैं परन्तु विकल्प (D) में कहा गया है कि विकर्ण लम्बाई में बराबर होते हैं अतः कथन असत्य है।

अतः विकल्प (D) सही है।

वर्णनात्मक प्रश्न

अति लघु उत्तरीय प्रश्न : (प्रत्येक 2 अंक)

1. मान लीजिए चतुर्भुज के चारों कोण $(3x)^o$, $(5x)^o$, $(9x)^o$ और $(13x)^o$ हैं।

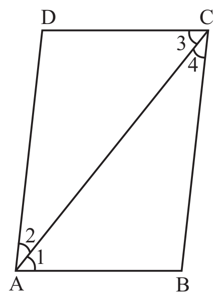
तब $3x + 5x + 9x + 13x = 360$

$\Rightarrow$ $30x = 360$

$\Rightarrow$ $x = \frac{360}{30} = 12$

$\therefore$ कोण हैं $(3 \times 12)^o$, $(5 \times 12)^o$, $(9 \times 12)^o$ और $(13 \times 12)^o$ अर्थात् 36^o, 60^o, 108^o और 156^o हैं।

2. दिया है : एक समान्तर चतुर्भुज $ABCD$ है जिसमें विकर्ण AC, $\angle A$ को समद्विभाजित करता है।



सिद्ध करना है : दिया गया विकर्ण AC, $\angle C$ को भी समद्विभाजित करता है।

उपपत्ति : चित्रानुसार $AB \parallel DC$ तथा AC एक तिर्यक रेखा इन्हें प्रतिच्छेदित करती है।

$\angle 1 = \angle 3$ (एकान्तर कोण) ...(i)

$\angle 2 = \angle 4$ (एकान्तर कोण) ...(ii)

परन्तु $\angle 1 = \angle 2$ [क्योंकि AC, $\angle A$ को समद्विभाजित करती है।] ...(iii)

अतः $\angle 3 = \angle 4$

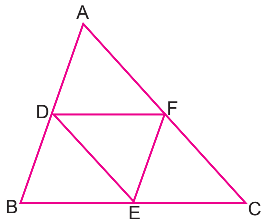
अतः AC, $\angle C$ को भी समद्विभाजित करती है। **इति सिद्धम्।**

लघु उत्तरीय प्रश्न : (प्रत्येक 4 अंक)

1. $\because$ D और E क्रमशः भुजाओं AB और BC के मध्य-बिंदु हैं,

$\therefore$ $DE \parallel AC$

इसी प्रकार, $DF \parallel BC$ और $EF \parallel AB$



इसलिए $ADEF$, $BDFE$ और $DFCE$ में से प्रत्येक एक समांतर चतुर्भुज है।

अब DE समांतर चतुर्भुज $BDFE$ का एक विकर्ण है।

इसलिए $\Delta BDE \cong \Delta FED$

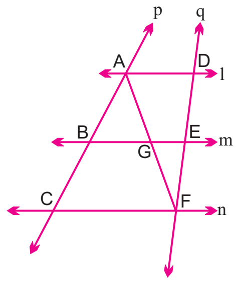
इसी प्रकार $\Delta DAF \cong \Delta FED$

और $\Delta EFC \cong \Delta FED$

अतः चारों त्रिभुज सर्वांगसम हैं।

2. दिया है : $AB = BC$

सिद्ध करना है : $DE = EF$



उपपत्ति : A को F से मिलाएँ और इससे AF रेखा m को G पर प्रतिच्छेद करती हुई जाती है।

समलंब चतुर्भुज $ACFD$ दो त्रिभुजों ACF और AFD में विभाजित हो जाता है।

B, भुजा AC का मध्य-बिंदु है। $(AB = BC)$

बिन्दु साथ ही, $BG \parallel CF$ $(\because m \parallel n)$

अतः G भुजा AF का मध्य-बिंदु है।

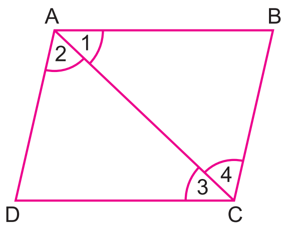
अब ΔAFD में, G भुजा AF का मध्य-बिंदु है और $GE \parallel AD$ है, इसलिए E भुजा DF का मध्य-बिंदु है।

अर्थात् $DE = EF$

दूसरे शब्दों में, l, m और n तिर्यक रेखा q पर भी बराबर अंतःखंड काटती हैं।

अतः $DE = EF$.

3. $ABCD$ एक समांतर चतुर्भुज है और विकर्ण AC कोण A को समद्विभाजित करता है



$\angle 1 = \angle 2$ ...(1) [चूँकि, AC कोण A को समद्विभाजित करता है]

$\angle 2 = \angle 4$ ...(2) [एकान्तर कोण]

समीकरण (1) और (2) से, हमें प्राप्त हुआ

$\angle 1 = \angle 4$

अब त्रिभुज ABC में, हमें ज्ञात है, $\angle 1 = \angle 4$

$BC = AB$ [बराबर कोणों की सम्मुख भुजाएँ बराबर होती हैं]

साथ ही, $AB = DC$ और $AD = BC$

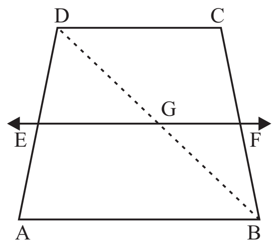
[समांतर चतुर्भुज की सम्मुख भुजाएँ बराबर होती हैं]

अतः, $ABCD$ एक समांतर चतुर्भुज है जिसकी भुजाएँ $AB = BC = CD = DA$

अतः, $ABCD$ एक समचतुर्भुज है।

4. दिया है : समलम्ब चतुर्भुज $ABCD$ में,

$AB \parallel DC$



E भुजा AD का मध्य–बिन्दु है, $EF \parallel AB$.

सिद्ध करना है : F, BC का मध्य–बिन्दु है।

रचना : DB को मिलाया। यह EF को G पर काटती है।

उपपत्ति : ΔDAB में, E भुजा AD का मध्य–बिन्दु है। (दिया है)

$EG \parallel AB$ [$\because$ $EF \parallel AB$]

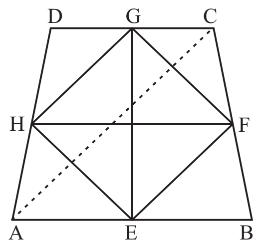
$\therefore$ विलोमतः मध्य–बिन्दु प्रमेय द्वारा G भुजा DB का मध्य–बिन्दु है।

ΔBCD में, G भुजा BD का मध्य–बिन्दु है। (सिद्ध है)

$GF \parallel DC$ [$\because$ $AB \parallel DC$ $EF \parallel AB \Rightarrow DC \parallel EF$]

$\therefore$ विलोमतः मध्य–बिन्दु प्रमेय द्वारा F भुजा BC का मध्य–बिन्दु है। **इति सिद्धम्।**

5. दिया है : एक चतुर्भुज $ABCD$ है जिसमें सम्मुख भुजाओं के मध्य–बिन्दुओं को मिलाने से प्राप्त रेखाखण्ड क्रमशः EG और FH हैं।



सिद्ध करना है : रेखाखण्ड EG और FH परस्पर समद्विभाजित करते हैं।

रचना : बिन्दुओं A व C, E व F, F व G, G व H तथा H व E को मिलाया।

उपपत्ति : ΔABC में भुजाओं AB तथा BC के मध्य–बिन्दु क्रमशः E व F हैं। अतः

$$EF \parallel AC \text{ तथा } EF = \frac{1}{2} AC \quad ..(i)$$

इसी प्रकार ΔADC में भुजाओं CD और AD के मध्य–बिन्दु क्रमशः G व H हैं। अतः

$$HG \parallel AC \text{ तथा } HG = \frac{1}{2} AC \quad ...(ii)$$

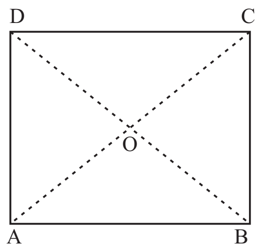
अब समीकरण (i) व (ii) से,

$$EF \parallel HG \text{ तथा } EF = HG$$

अतः $EFGH$ एक समान्तर चतुर्भुज है क्योंकि हम जानते हैं कि यदि किसी चतुर्भुज की सम्मुख भुजाओं का एक युग्म बराबर और समान्तर हो तो वह समान्तर चतुर्भुज होता है। साथ ही समान्तर चतुर्भुज के विकर्ण परस्पर समद्विभाजक होते हैं। अतः समान्तर चतुर्भुज $EFGH$ के विकर्ण अर्थात् रेखाखण्ड EG और FH परस्पर समद्विभाजित होते हैं।

6. दिया है : समान्तर चतुर्भुज $ABCD$ जिसमें $AC = BD$.

सिद्ध करना है : $ABCD$ एक आयत है।

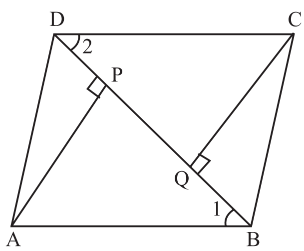


उपपत्ति : ΔABC तथा ΔDCB में,

	$AB = DC,$	(समान्तर चतुर्भुज की सम्मुख भुजायें)
	$BC = BC,$	(उभयनिष्ठ)
तथा	$AC = DB$	(दिया है)
$\therefore$	$\Delta ABC \cong \Delta DCB,$	(SSS गुण द्वारा)
$\Rightarrow$	$\angle ABC = \angle BCD$	(सर्वांगसम त्रिभुजों के संगत भाग)
लेकिन	$\angle ABC + \angle BCD = 180^\circ$	(क्रमागतः अन्तःकोणों का योग 180º होता है)
अतः	$2\angle ABC = 180^\circ$	
$\Rightarrow$	$\angle ABC = 90^\circ$	
अतः	$\angle ABC = \angle DCB = 90^\circ$	

अर्थात् $ABCD$ एक आयत है।

7. प्रश्नानुसार $ABCD$ एक समान्तर चतुर्भुज है जिसमें



$AB \parallel DC$ तथा BD एक तिर्यक रेखा है।

$\angle 1 = \angle 2$ (एकान्तर कोण) ...(i)

(i) अब आकृति में बनने वाले ΔAPB और ΔCQD में,

$\angle APB = \angle CQD = 90^\circ$ (दिया है)

$\angle 1 = \angle 2$ [समीकरण (i) के अनुसार]

तथा $AB = CD$

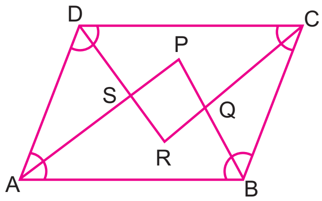
[क्योंकि समान्तर चतुर्भुज की सम्मुख भुजाएँ बराबर होती हैं।]

$\therefore$ $\Delta APB \cong \Delta CQD$ (सर्वांगसमता के नियम AAS के अनुसार)

(ii) $\therefore$ $AP = CQ.$ (क्योंकि ये सर्वांगसम त्रिभुजों के संगत भाग हैं।)

दीर्घ उत्तरीय प्रश्न : (प्रत्येक 6 अंक)

1. मान लीजिए P, Q, R और S क्रमशः समांतर चतुर्भुज $ABCD$ के $\angle A$ और $\angle B$, $\angle B$ और $\angle C$, $\angle C$ और $\angle D$ तथा $\angle D$ और $\angle A$ के समद्विभाजकों के प्रतिच्छेद बिंदु हैं (देखिए आकृति)।



$\because$ DS कोण D को और AS कोण A को समद्विभाजित करते हैं, इसलिए ΔASD में,

$$\angle DAS + \angle ADS = \frac{1}{2}\angle A + \frac{1}{2}\angle D$$

$$= \frac{1}{2}(\angle A + \angle D)$$

$$= \frac{1}{2} \times 180^\circ$$

($\angle A$ और $\angle D$ तिर्यक रेखा के एक ही ओर के अंतः कोण हैं)

$= 90^\circ$

साथ ही, $\angle DAS + \angle ADS + \angle DSA = 180^\circ$ (त्रिभुज का कोण योग गुण)

या $90^\circ + \angle DSA = 180^\circ$

या $\angle DSA = 90^\circ$

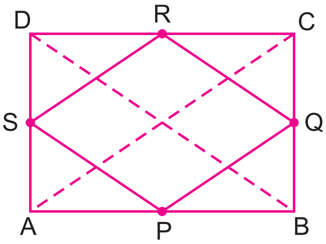
अतः $\angle PSR = 90^\circ$ (शीर्षाभिमुख कोण)

इसी प्रकार, $\angle APB = 90^\circ$ या $\angle SPQ = 90^\circ$, $\angle PQR = 90^\circ$ और $\angle SRQ = 90^\circ$ हैं।

इसलिए, $PQRS$ एक ऐसा चतुर्भुज है जिसके सभी कोण समकोण हैं।

स्पष्टत : यह एक आयत है क्योंकि इसके सम्मुख कोणों के दोनों युग्म बराबर हैं।

2. ज्ञात है : चतुर्भुज $ABCD$ में $AC = BD$ और P, Q, R और S क्रमशः भुजाओं AB, BC, CD और DA के मध्य बिन्दु हैं।



सिद्ध करना है : $PQRS$ एक समचतुर्भुज है।

रचना : AC और BD को मिलाया।

उपपत्ति : त्रिभुज ABC में,

P और Q भुजा AB और BC के मध्य बिंदु हैं।

मध्यबिंदु प्रमेय से,

$$PQ \parallel AC \text{ और } PQ = \frac{1}{2} AC \quad ...(1)$$

R एवं S भुजा CD और AD के मध्य बिन्दु हैं।

मध्यबिंदु प्रमेय से,

$$SR \parallel AC \text{ और } SR = \frac{1}{2} AC \quad ...(2)$$

समीकरण (1) एवं (2) से

$$PQ \parallel SR \text{ तथा } PQ = SR$$

हम जानते हैं कि किसी चतुर्भुज में यदि सम्मुख भुजाओं का एक जोड़ा समान्तर तथा बराबर हो तो वह एक समांतर चतुर्भुज बन जाता है।

इसलिए $PQRS$ एक समान्तर चतुर्भुज है।

त्रिभुज DAB में S और P, AD और AB के मध्य बिंदु हैं।

मध्यबिंदु प्रमेय से,

$$SP \parallel BD \text{ तथा } SP = \frac{1}{2} BD \quad ...(3)$$

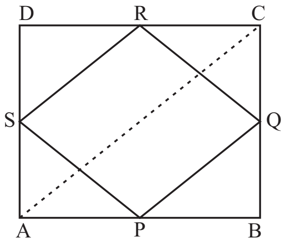
दिया है, $AC = BD$ ...(4)

समीकरण (1), (2) और (3) से, हमें ज्ञात है,

$$SP = PQ$$

हम जानते हैं कि यदि समांतर चतुर्भुज की आसन्न भुजाएँ बराबर हों तो वह एक समचतुर्भुज बन जाता है।
इसलिए, $PQRS$ एक समचतुर्भुज है।

3. दिया है: एक चतुर्भुज $ABCD$ जिसमें P, Q, R और S क्रमशः AB, BC, CD और DA के मध्य–बिन्दु हैं, साथ ही AC इसका विकर्ण है।



सिद्ध करना है: (i) $SC \parallel AC$ और $SR = \frac{1}{2}AC$ (ii) $PQ = SR$

(iii) $PQRS$ एक समान्तर चतुर्भुज है।

उपपत्ति: (i) ΔACD में,

AD का मध्य–बिन्दु S है और CD का मध्य बिन्दु R है।

तब $SR \parallel AC$ और $SR = \frac{1}{2}AC$ (मध्य–बिन्दु प्रमेय)

(ii) ΔABC में, भुजा AB का P मध्य–बिन्दु है और भुजा BC का मध्य–बिन्दु Q है।

तब $PQ \parallel AC$

और $PQ = \frac{1}{2}AC$ (मध्य–बिन्दु प्रमेय)

इस प्रकार, हमने सिद्ध किया कि:

$PQ \parallel AC$

$SR \parallel AC$

$\Rightarrow$ $PQ \parallel SR$

साथ ही, $PQ = \frac{1}{2}AC$

$SR = \frac{1}{2}AC$

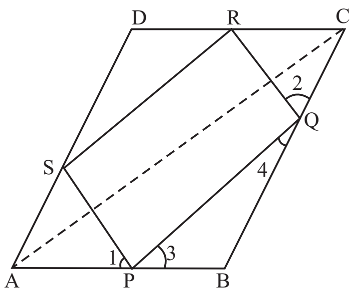
$\Rightarrow$ $PQ = SR.$

(iii) चूँकि $PQ = SR$ और $PQ \parallel SR$

$\Rightarrow$ सम्मुख भुजाओं का एक युग्म बराबर और समान्तर होता है।

$\Rightarrow$ $PQRS$ एक समान्तर चतुर्भुज है।

4. दिया है: $ABCD$ एक समचतुर्भुज है जिसमें P, Q, R और S क्रमशः AB, BC, CD और DA के मध्य–बिन्दु हैं। चतुर्भुज $PQRS$ बनाने के लिए PQ, OR, RS और SP को मिलाया गया है।



सिद्ध करना है: $PQRS$ एक आयत है।

रचना: AC को मिलाएँ।

उपपत्ति: ΔABC में P और Q रेखा AB और BC के मध्य–बिन्दु हैं।

$$PQ \parallel AC \text{ और } PQ = \frac{1}{2}AC \quad ...(1)$$

इसी प्रकार, ΔADC में R और S रेखा CD और PD के मध्य–बिन्दु हैं।

$\therefore$ $$SR \parallel AC \text{ और } SR = \frac{1}{2}AC \quad ...(2)$$

समीकरण (1) और (2) से, $PQ \parallel RS$ और $PQ = SR$

अब, चतुर्भुज $PQRS$ में इसकी सम्मुख भुजाओं PQ और SR व एक युग्म बराबर और समान्तर हैं।

$\therefore$ $PQRS$ एक समान्तर चतुर्भुज है।

$AB = BC$ (समचतुर्भुज की भुजाएँ)

$\Rightarrow$ $\frac{1}{2}AB = \frac{1}{2}BC$

$\Rightarrow$ $PB = BQ$

$\Rightarrow$ $\angle 3 = \angle 4$

(एक त्रिभुज की बराबर भुजाओं के सम्मुख कोण)

अब, ΔAPC और ΔCQR में,

$AP = CQ$ (समान भुजाओं AB, BC के आधे)

$AS = CR$ (समान भुजाओं AD, CD के आधे)

$PS = QR$ (समान्तर चतुर्भुज $PQRS$ की सम्मुख भुजाएँ)

$\therefore$ $\Delta APS \cong \Delta CQR$ (SSS सर्वांगसम प्रमेय)

$\Rightarrow$ $\angle 1 = \angle 2$ (सर्वांगसम त्रिभुजों के संगत भाग)

अब, $\angle 1 + \angle SPQ + \angle 3 = 180^\circ$ (रेखिक युग्म स्वतः सिद्ध)

$\therefore$ $\angle 1 + \angle SPQ + \angle 3 = \angle 2 + \angle PQR + \angle 4$

लेकिन $\angle 1 = \angle 2$ तथा $\angle 3 = \angle 4$ (ऊपर सिद्ध है)

$\therefore$ $\angle SPQ = \angle PQR$ ...(3)

$SP \parallel RQ$ उन्हें काटते हैं,

$\angle SPQ + \angle PQR = 180^\circ$ ...(4)

$\therefore$ $\angle SPQ = \angle PQR = 90^\circ$

समीकरण (3) और (4) से, $\angle SPQ = \angle PQR = 90^\circ$

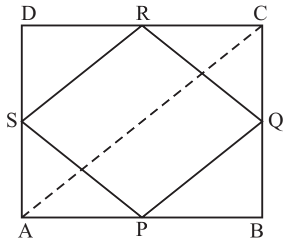
इस प्रकार, $PQRS$ एक समान्तर चतुर्भुज है जिसका एक $\angle SPQ = 90^\circ$

अतः $PQRS$ एक आयत है। **इति सिद्धम्।**

5. दिया है: $ABCD$ एक आयत है, जिसमें P, Q, R और S क्रमशः भुजाओं AB, BC, CD तथा DA के मध्य बिन्दु हैं। PQ, QR, RS तथा SP को मिलाया जिससे चतुर्भुज $PQRS$ प्राप्त होता है।

सिद्ध करना है: $PQRS$ एक समचतुर्भुज है।

रचना: AC को मिलाया।



उपपत्ति: ΔABC में, भुजा AB तथा BC के मध्य–बिन्दु P तथा Q हैं।

$\therefore \quad PQ \parallel AC$ तथा $PQ = \frac{1}{2}AC$ ...(1)

इसी प्रकार ΔADC में, भुजा CD तथा AD के मध्य–बिन्दु R तथा S हैं।

$\therefore \quad SR \parallel AC$ तथा $SR = \frac{1}{2}AC$ ...(2)

समीकरण (1) तथा (2) से, $PQ \parallel SR$ तथा $PQ = SR$ ...(3)

अब चतुर्भुज $PQRS$ में इसकी सम्मुख भुजाओं PQ तथा SR का एक युग्म समान्तर तथा समान है।

[समीकरण (3) से]

$\therefore$ $PQRS$ एक समान्तर चतुर्भुज है।

अब, $AD = BC$ (आयत $ABCD$ की सम्मुख भुजायें)

$\Rightarrow \quad \frac{1}{2}AD = \frac{1}{2}BC \Rightarrow AS = BQ$ ...(4)

ΔAPS तथा BPQ से $AP = BP$ (AB का मध्य–बिन्दु P है)

$\angle PAS = \angle PBQ$ (प्रत्येक = 90°)

$AS = BQ$ (ऊपर सिद्ध किया है)

$\Delta APS \cong \Delta BPQ$ (SAS प्रगुण से)

$\Rightarrow \quad PS = PQ$ (C.P.C.T.) ...(5)

समीकरण (4) व (5) से, $PQRS$ एक समचतुर्भुज है। **इति सिद्धम्।**

6. प्रश्नानुसार दिया गया है कि AB तथा CD भुजाओं के मध्य–बिन्दु क्रमशः E तथा F हैं। अतः

$$AE = \frac{1}{2}AB \text{ और } CF = \frac{1}{2}CD \quad ...(i)$$

लेकिन $ABCD$ एक समान्तर चतुर्भुज है अतः

$AE = CD$ और $AB \parallel DC$

या $\frac{1}{2}AB = \frac{1}{2}CD$ और $AB \parallel DC$

या $AE = FC$ और $AE \parallel FC$ [समीकरण (i) से]

अर्थात् $AEFC$ एक समान्तर चतुर्भुज है।

$\Rightarrow \quad FA \parallel CE$

या $FP \parallel CQ$

क्योंकि FP, FA का एक ही भाग है और CQ, CE का एक भाग है। ...(ii)

हम जानते हैं कि त्रिभुज की एक भुजा के मध्य–बिन्दु से खींची गई रेखा तीसरी भुजा की समद्धिभाजित करती है।

अब ΔDCQ में भुजा CD का मध्य–बिन्दु F है तथा $PF \parallel CQ$ [समीकरण (ii) से]

अतः भुजा DQ का मध्य–बिन्दु P है।

अर्थात् $DP = PQ$ ...(iii)

इसी प्रकार ΔABQ में, AB का मध्य–बिन्दु E है तथा $EQ \parallel AP$

अतः BP भुजा का मध्य–बिन्दु Q है।

अर्थात् $BQ = PO$ ...(iv)

अब समीकरण (iii) व (iv) से,

$DP = PQ = BQ$ ...(v)

अब $BO = BQ + PQ + DP$ (v)

$= BQ + BQ + BQ$

या $BD = 3BQ$

या $3BQ = BD$

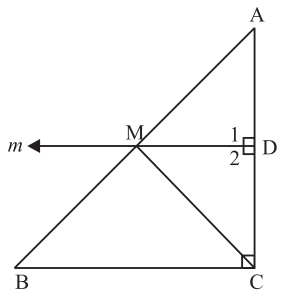
या $BQ = \frac{1}{3}BD$ ...(vi)

अब समीकरण (v) व (vi) से,

$$DP = PQ = BQ = \frac{1}{3}BD$$

अर्थात् भुजा DB को बिन्दु P और Q तीन भागों में विभाजित करते हैं। या यह भी कहा जा सकता है कि BD भुजा को AF और CF तीन भागों में विभाजित करते हैं।

7. (i) ΔABC में भुजा AB का मध्य–बिन्दु M है, प्रश्नानुसार यह दिया है।



$MD \parallel BC$

$\therefore$ $AD = DC$ (मध्य–बिन्दु प्रमेय के विलोम के अनुसार)

अतः AC भुजा का मध्य बिन्दु D है। **इति सिद्धम्।**

(ii) माना कि भुजा BC के समान्तर खींची गई रेखा m है। (दिया है)

तथा तिर्यक रेखा AC है।

$\therefore$ $\angle 1 = \angle C$ (संगत कोण)

या $\angle 1 = 90^\circ$ [$\because \angle C = 90^\circ$] (दिया है)

अतः $MD \perp AC$. **इति सिद्धम्।**

(iii) आकृति में बने ΔAMD तथा ΔCMD में

$\angle 1 = \angle 2 = 90°$ (सिद्ध कर चुके हैं),

$AD = DC$ (सिद्ध कर चुके हैं)

तथा $MD = MD$ (उभयनिष्ठ भुजाएँ)

अतः $\Delta AMD \cong \Delta CMD$ (सर्वांगसमता के नियम SAS के अनुसार)

$AM = CM$ (क्योंकि ये सर्वांगसम त्रिभुजों के संगत भाग हैं) ...(i)

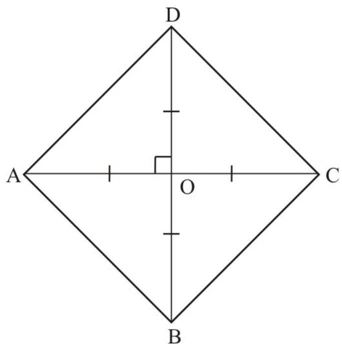
दिया है कि AB भुजा का मध्य–बिन्दु M है।

$\therefore \quad AM = \frac{1}{2}AB$ ...(ii)

समीकरण (i) व (ii) से,

$CM = AM = \frac{1}{2}AB.$ **इति सिद्धम्।**

8. चतुर्भुज $ABCD$ में विकर्ण AC और BD बिन्दु O पर काटते है, जिससे कि $AO = OC$, $BO = OD$ और $AC \perp BD$ प्राप्त होते हैं।



सिद्ध करना है : $ABCD$ एक समचतुर्भुज हैं।

उपपत्ति : चूँकि चतुर्भुज $ABCD$ के विकर्ण AC और BD एक–दूसरे को समकोण पर समद्विभाजित करते हैं।

$\therefore AC$, रेखाखण्ड BD का लम्ब समद्विभाजक है

$\Rightarrow A$ और C दोनों B और D से समान दूरी पर हैं।

$\Rightarrow \quad AB = AD$ और $CB = CD$ ...(1)

साथ ही, BD रेखाखण्ड AC का लम्ब समद्विभाजक है।

$\Rightarrow B$ और D दोनों A और C से समान दूरी पर स्थित हैं।

$\Rightarrow \quad AB = BC$ और $AD = DC$ ...(2)

समी. (1) व (2) से, $AB = BC = CD = AD$

इस प्रकार $ABCD$ एक चतुर्भुज है, जिसके विकर्ण एक–दूसरे को समकोण पर समद्विभाजित करते हैं और चारों भुजाएँ बराबर हैं।

अतः, $ABCD$ एक समचतुर्भुज है। **इति सिद्धम्।**

दूसरा प्रमाण : पहले हम सिद्ध करेंगे कि $ABCD$ एक समचतुर्भुज है।

ΔAOD और ΔCOB में,

$AO = OC$ (दिया है)

$OD = OB$ (दिया है)

$\angle AOD = \angle COB$ (शीर्षाभिमुख कोण)

सर्वांगसम की SAS रचना द्वारा,

$$\Delta AOD \cong \Delta COB$$

$\Rightarrow$ $\angle OAD = \angle OCB$ ...(1)

(सर्वांगसम त्रिभुजों के सदृश भाग समान होते हैं)

अब रेखा AC, AD और BC को बिन्दु A तथा C पर क्रमशः इस प्रकार काटती हैं कि

$\angle OAD = \angle OCB$ [समीकरण (1) से]

अर्थात् आन्तरिक एकान्तर कोण बराबर होते हैं।

$\therefore$ $AD \parallel BC$

इसी प्रकार $AB \parallel CD$

अतः, $ABCD$ एक समान्तर चतुर्भुज है।

अब हम सिद्ध करेंगे कि समान्तर चतुर्भुज $ABCD$ एक समचतुर्भुज है।

ΔAOD और ΔCOD में,

$OA = OC$ (दिया है)

$\angle AOD = \angle COD$ (दोनों समकोण हैं)

$OD = OD$ (उभयनिष्ठ)

$\therefore$ सर्वांगसम की SAS रचना द्वारा

$$\Delta AOD \cong \Delta COD$$

$\Rightarrow$ $AD = CD$ ...(2)

(सर्वांगसम त्रिभुजों के सदृश भाग बराबर होते हैं)

अब $ABCD$ एक समचतुर्भुज है (ऊपर सिद्ध कर चुके हैं)

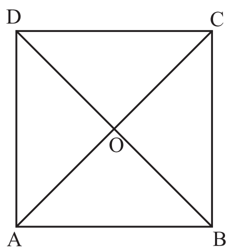
$\Rightarrow$ $AB = CD$ और $AD = BC$

(समचतुर्भुज के सम्मुख कोण बराबर होते हैं)

$\Rightarrow$ $AB = CD = AD = BC$ (समीकरण (2) से)

अतः चतुर्भुज $ABCD$ एक समचतुर्भुज है। **इति सिद्धम्।**

9. दिया है : एक वर्ग $ABCD$.



सिद्ध करना है: $AC = BD$,

$AC \perp BD$ और $OA = OC$, $OB = OD$.

उपपत्ति : चूँकि $ABCD$ एक वर्ग है इसलिए $AB \parallel CD$ और $AD \parallel BC$.

अब, $AB \parallel DC$ और तिर्यक रेखा AC उन्हें क्रमशः A और C पर काटती है।

$\therefore$ $\angle BAC = \angle DCA$

(आन्तरिक एकान्तर कोण बराबर होते हैं)

$\Rightarrow$ $\angle BAO = \angle DCO$ ...(1)

पुनः, $AB \parallel DC$ और BD उन्हें क्रमशः B और D पर प्रतिच्छेद करती हैं

$\therefore$ $\angle ABD = \angle CDB$ (आन्तरिक एकान्तर कोण बराबर होते हैं)

$\Rightarrow$ $\angle ABO = \angle CDO$ ...(2)

अब ΔAOB और ΔCOD में,

$\angle BAO = \angle DCO$ [समीकरण (1) से]

$AB = CD$

(समान्तर चतुर्भुज की सम्मुख भुजाएँ बराबर होती हैं)

और $\angle ABO = \angle CDO$ [समीकरण (2) से]

$\therefore$ सर्वांगसम की ASA रचना द्वारा

$\Delta AOB \cong \Delta COD$

$\Rightarrow$ $OA = OC$ और $OB = OD$

(सर्वांगसम त्रिभुजों के सदृश भाग बराबर होते हैं)

अतः विकर्ण एक–दूसरे को समद्विभाजित करते हैं।

ΔADB और ΔBCA में, $AD = BC$ (वर्ग की भुजाएँ बराबर होती हैं)

$\angle BAD = \angle BAC$ (प्रत्येक कोण 90º)

और, $AB = BA$ (उभयनिष्ठ)

$\therefore$ सर्वांगसम की SAS रचना द्वारा

$\Delta ADB \cong \Delta BCA$

$\Rightarrow$ $AC = BD$

($\because$ सर्वांगसम त्रिभुज के संगत भाग बराबर होते हैं अतः विकर्ण बराबर होते हैं)

अतः ΔAOB और ΔAOD में,

$OB = OD$

($\because$ समान्तर चतुर्भुज में विकर्ण एक–दूसरे को समद्विभाजित करते हैं)

$AB = AD$ (वर्ग की भुजाएँ बराबर होती हैं)

$AO = AO$ (उभयनिष्ठ)

सर्वांगसम की SSS रचना द्वारा,

$\Delta AOB \cong \Delta AOD$

$\angle AOB = \angle AOD$

(सर्वांगसम त्रिभुजों के संगत भाग बराबर होते हैं)

लेकिन $\angle AOB + \angle AOD = 180^\circ$

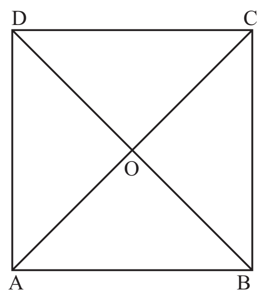
$\therefore$ $\angle AOB = \angle AOD = 90^\circ$

$\Rightarrow$ $AO \perp BD$

$\Rightarrow$ $AC \perp BD$

अतः विकर्ण समकोणों पर प्रतिच्छेद करते हैं। **इति सिद्धम्।**

10. दिया है : एक चतुर्भुज $ABCD$ में विकर्ण $AC = BD$, $AO = OC$, $BO = OD$ और $AC \perp BD$ है।



सिद्ध करना है : चतुर्भुज $ABCD$ एक वर्ग है।

उपपत्ति : पहले हम सिद्ध करेंगे कि $ABCD$ एक समान्तर चतुर्भुज है।

ΔAOD और ΔCOB में,

$AO = OC$ (दिया है)

$OD = OB$ (दिया है)

$\angle AOD = \angle BOC$ (शीर्षाभिमुख कोण)

सर्वांगसम की SAS रचना द्वारा

$\Delta AOD \cong \Delta COB$

$\Rightarrow$ $\angle OAD = \angle COB$ ...(1)

(सर्वांगसम त्रिभुजों के सदृश भाग बराबर होते हैं)

अब रेखा AC रेखा AD और रेखा BC को क्रमशः A और C पर काटती है, जिससे कि

$\angle OAD = \angle OCB$ (समीकरण (1) से)

अर्थात् आन्तरिक एकान्तर कोण बराबर होते हैं।

$\therefore$ $AD \parallel BC$

इसी प्रकार, $AB \parallel CD$

अतः $ABCD$ एक समान्तर चतुर्भुज है।

अब हम सिद्ध करेंगे कि यह एक वर्ग है।

ΔAOB और ΔAOD में,

$AO = AO$ (उभयनिष्ठ)

$\angle AOB = \angle AOD$ (प्रत्येक $= 90^\circ$, दिया है)

और $OB = OD$

(समान्तर चतुर्भुजों के विकर्ण एक–दूसरे को समद्विभाजित करते हैं)

$\therefore$ सर्वांगसम की SAS रचना द्वारा

$\Delta AOB \cong \Delta AOD$

$\Rightarrow$ $AB = AD$ (सर्वांगसम त्रिभुजों के सदृश भाग बराबर होते हैं)

परन्तु $AB = CD$ और $AD = BC$

(समान्तर चतुर्भुज की सम्मुख भुजाएँ बराबर होती हैं)

$AB = BC = CD = AD$ ...(1)

अब ΔABD और ΔBAC में,

$AB = BA$ (उभयनिष्ठ)

$AD = BC$ (समान्तर चतुर्भुज की सम्मुख भुजाएँ बराबर होती हैं)

और $BD = AC$ (दिया है)

$\therefore$ सर्वांगसम की SSS रचना द्वारा

$\Delta ABD \cong \Delta BAC$

$\Rightarrow$ $\angle DAB = \angle CBA$ (सर्वांगसम त्रिभुजों के संगत भाग बराबर होंगे)

अर्थात् $\angle DAB = \angle CAB = 180^\circ$ (समान्तर चतुर्भुज के अन्तःकोणों के योग से)

$\therefore$ $2\angle DAB = 180^\circ$

या $\angle DAB = 90^\circ$

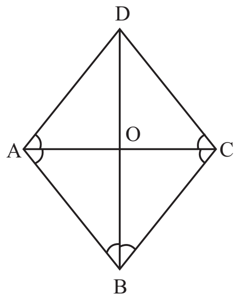
इसी प्रकार $2\angle CBA = 180^\circ$

या $\angle CBA = 90^\circ$

अतः $ABCD$ एक वर्ग है। **इति सिद्धम्।**

11. प्रश्नानुसार $ABCD$ एक समचतुर्भुज है।

अतः $AB = BC = CD = AD$



माना कि विकर्ण BD का समद्विभाजक बिन्दु O है

अतः $OB = OD$ होगा।

अब ΔAOB तथा ΔAOD से,

$OA = OA$ (उभयनिष्ठ भुजाएँ)

$AB = AD$ (समचतुर्भुज की भुजाएँ)

तथा $OB = OD$

क्योंकि समचतुर्भुज के विकर्ण परस्पर समद्विभाजित करते हैं।

अतः $\Delta AOB \cong \Delta AOD$ (सर्वांगसमता के SSS नियम के अनुसार)

$\therefore$ $\angle OAD = \angle OAB$ (क्योंकि ये सर्वांगसम त्रिभुजों के संगत भाग हैं।)

अर्थात् $OA, \angle A$ को समद्विभाजित करता है। ...(i)

इसी प्रकार $\Delta BOC = \Delta DOC$

तथा $\angle OCB = \angle OCD$

$\Rightarrow$ $OC, \angle C$ को समद्विभाजित करता है। ...(ii)

अतः समीकरण (i) व (ii) के आधार पर यह कहा जा सकता है कि $AC, \angle A$ और $\angle C$ को समद्विभाजित करता है। पुनः ΔAOB और ΔBOC में,

$OB = OB$ (उभयनिष्ठ भुजाएँ)

$AB = BC$ (समचतुर्भुज की भुजाएँ)

तथा $OA = OC$

क्योंकि समचतुर्भुज के विकर्ण परस्पर समद्विभाजित करते हैं अतः

$\Delta AOB = \Delta COB$ (सर्वांगसमता के SSS नियम के अनुसार)

$\therefore$ $\angle OBA = \angle OBC$ (क्योंकि ये सर्वांगसम त्रिभुजों के संगत भाग हैं।) ...(iii)

अतः $OB, \angle B$ को समद्विभाजित करता है।

इसी प्रकार $\Delta AOD \cong \Delta COD$

तथा $\angle ODA = \angle ODC$

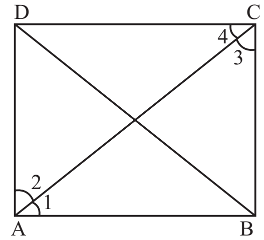
$\Rightarrow$ $OD, \angle D$ को समद्विभाजित करता है। ...(iv)

समीकरण (iii) व (iv) के आधार पर यह कहा जा सकता है कि विकर्ण BD दोनों कोणों B तथा D को समद्विभाजित करता है। **इति सिद्धम्।**

12. प्रश्नानुसार एक आयत $ABCD$ है जिसमें

$$AB = DC \quad ...(1)$$

तथा $$BC = AD$$



साथ ही प्रत्येक कोण अर्थात्

$$\angle A = \angle B = \angle C = \angle D = 90^\circ$$

(i) त्रिभुज ABC और ΔADC में,

$$\angle 1 = \angle 2$$

तथा $$\angle 3 = \angle 4$$

क्योंकि विकर्ण AC दोनों कोणें को समद्विभाजित करता है।

तथा $AC = AC$ (उभयनिष्ठ भुजाएँ)

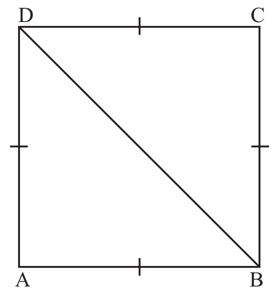
∴ $\Delta ABC \cong \Delta ADC$ (सर्वांगसमता के नियम ASA के अनुसार)

अतः $AB = AD$ ...(2)

समीकरण (1) तथा (2) से $AB = BC = AD = DC$

अर्थात् आयत की सभी भुजाएँ समान हैं। अतः एक वर्ग है।

(ii) संलग्न चित्रानुसार,



ΔABD तथा ΔBDC में,

$AB = BC$ [आयत $ABCD$ एक वर्ग है]

$AD = DC$ [आयत $ABCD$ एक वर्ग है]

तथा $BD = BD$ (उभयनिष्ठ भुजाएँ)

अतः $\Delta ABD \cong BDC$ (सर्वांगसमता के नियम SSS के अनुसार)

∴ $\angle ABD = \angle CBD$ ...(3)

(क्योंकि ये सर्वांगसम त्रिभजों के संगत भाग हैं।)

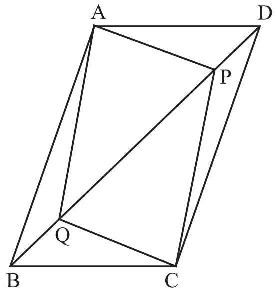
$\angle ADB = \angle CDB$ (क्योंकि ये सर्वांगसम त्रिभजों के संगत भाग हैं।)

अतः समीकरण (3) व (4) के आधार पर यह कहा जा सकता है कि विकर्ण BD दोनों कोणों B तथा D को समद्विभाजित करता है। **इति सिद्धम्।**

13. (i) प्रश्न के दिए चित्र के ΔAPD तथा ΔCQB से,

$DP = BQ$ (दिया है)

$\angle ADP = \angle QBC$



क्योंकि समान्तर चतुर्भुज $ABCD$ में $AD \parallel BC$ तथा BD एक तिर्यक रेखा उन्हें काटती है।

$\therefore$ $\angle ADB = \angle DBC$ (एकान्तर कोण)

$\therefore$ $\angle ADP = \angle QBC$

$AD = CB$

क्योंकि समान्तर चतुर्भुज की सम्मुख भुजाएँ बराबर होती हैं।

$\therefore$ $\Delta APD \cong \Delta CQB$ (सर्वांगसमता के नियम SAS के अनुसार)

(ii) $\therefore$ $AP = CQ$ (क्योंकि ये सर्वांगसम त्रिभुजों के संगत भाग हैं।)

(iii) अब पुनः ΔAQB तथा ΔCPD से,

$BQ = DP$ (दिया है)

$\angle ABQ = \angle PDC$

क्योंकि समान्तर चतुर्भज $ABCD$ में $AB \parallel CD$ तथा BD एक तिर्यक रेखा इनको काटती है।

$\therefore$ $\angle ABD = \angle BDC$ (एकान्तर कोण)

$\therefore$ $\angle ABQ = \angle PDC$

$AB = CD$

क्योंकि समान्तर चतुर्भुज की सम्मुख भुजाएँ बराबर होती हैं।

$\therefore$ $\Delta AQB \cong \Delta CPD$ (सर्वांगसमता के नियम SAS के अनुसार)

(iv) $\therefore$ $AQ = CP$ (क्योंकि ये सर्वांगसम त्रिभुजों के संगत भाग हैं।)

(v) अब चतुर्भुज $APCQ$ से,

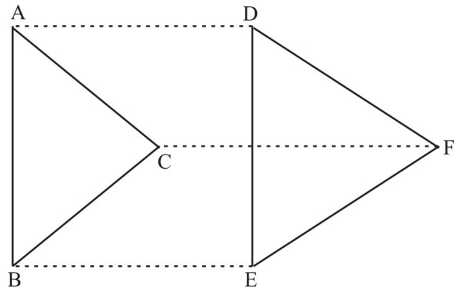
$AP = CQ$ (भाग ii से)

तथा $AQ = CP$ (भाग iv से)

अर्थात् चतुर्भुज $APCQ$ की सम्मुख भुजाएँ बराबर हैं। हम जानते हैं कि एक समान्तर चतुर्भुज की सम्मुख भुजाएँ समान होती हैं। अतः $APCQ$ एक समान्तर चतुर्भुज है।

14. **दिया है :** दो ΔABC और ΔDEF इस प्रकार हैं कि

$AB = DE, AB \parallel DE$ साथ ही $BC = EF$ और $BC \parallel EF.$



सिद्ध करना है : (i) चतुर्भुज *ABED* एक समान्तर चतुर्भुज है।

(ii) चतुर्भुज *BEFC* एक समान्तर चतुर्भुज है।

(iii) $AD \parallel CF$ और $AD = CF$.

(iv) चतुर्भुज *ACFD* एक समान्तर चतुर्भुज है।

(v) $AC = DF$

(vi) $\Delta ABC \cong \Delta DEF$.

उपपत्ति : (i) चतुर्भुज *ABED* में,

$AB = DE$ और $AB \parallel DE$

⇒ सम्मुख भुजाओं का एक युग्म बराबर और समान्तर है।

∴ *ABED* एक समान्तर चतुर्भुज है।

(ii) अब चतुर्भुज *BEFC* में,

$BC = FE$ और $BC \parallel EF$

⇒ सम्मुख भुजाओं का एक युग्म बराबर और समान्तर है।

∴ *BEFC* एक समान्तर चतुर्भुज है। **इति सिद्धम्।**

(iii) अब, $AD = BE$ और $AD \parallel BE$ ...(1)

(∵ *ABED* एक समान्तर चतुर्भुज है)

और $CF = BE$ और $CF \parallel BE$ ...(2)

(∵ *BEFC* एक समान्तर चतुर्भुज है)

समीकरण (1) और (2) से, $AD = CF$ और $AD \parallel CF$ **इति सिद्धम्।**

(iv) चूँकि $AD = CF$ और $AD \parallel CF$

⇒ सम्मुख भुजाओं का एक युग्म बराबर और समान्तर है।

∴ *ACFD* एक समान्तर चतुर्भुज है। **इति सिद्धम्।**

(v) चूँकि *ACFD* एक समान्तर चतुर्भुज है।

∴ $AC = DF$ और $AC \parallel DF$. **इति सिद्धम्।**

(vi) ΔABC और ΔDEF में,

$AB = DE$, (समान्तर चतुर्भुज *ABED* की सम्मुख भुजाएँ)

$BC = EF$, (समान्तर चतुर्भुज *BEFC* की सम्मुख भुजाएँ)

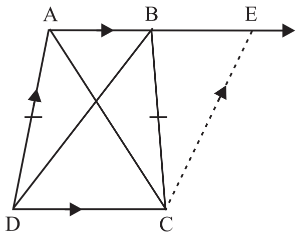
और $CA = FD$, (समान्तर चतुर्भुज *ACFD* की सम्मुख भुजाएँ)

∴ सर्वांगसम की SSS रचना से,

$\Delta ABC \cong \Delta DEF$. **इति सिद्धम्।**

15. दिया है : $ABCD$ एक समलम्ब है।

जिसमें $AB \parallel DC$ और $AD = BC$ है।



सिद्ध करना है : (i) $\angle A = \angle B$

(ii) $\angle C = \angle D$

(iii) $\angle ABC = \angle BAD$

(iv) विकर्ण AC = विकर्ण BD

रचना : AB रेखाखण्ड को आगे बढ़ाया और एक $CE \parallel AD$ रेखा खींची। रेखा CE, AB के बढ़े हुए भाग को बिन्दु E पर मिलती है। $ABCD$ एक समान्तर चतुर्भुज है। $AD \parallel CE$ तथा $AD = CE$

उपपत्ति : (i) चतुर्भुज $ADCE$ में,

$AD \parallel CE$

$AE \parallel DC$

अतः $AD = EC$

तथा $AD = BC$

$\therefore$ $BC = EC$

$\angle CBE = \angle BEC,$ (त्रिभुज की समान भुजाओं के सम्मुख कोण)

$\angle A + \angle E = 180^\circ$

$\angle E = \angle CBE$

$\therefore$ $\angle A + \angle CBE = 180^\circ$

लेकिन $\angle ABC + \angle CBE = 180^\circ$

अतः $\angle A = \angle ABC = \angle B$

इस प्रकार $\angle A = \angle B$

(ii) $\angle A = \angle BCD$ तथा $\angle B = \angle D$

$\therefore$ $\angle BCD = \angle D$

या $\angle C = \angle D.$

(iii) ΔABC तथा ΔBAD में,

$BC = AD,$

$AB = BA,$ (उभयनिष्ठ)

$\angle A = \angle B,$

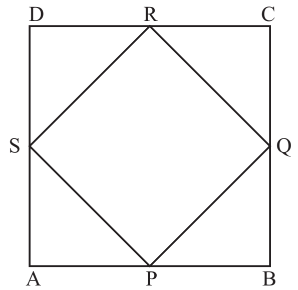
अतः $\Delta ABC \cong \Delta BAD.$ (SAS गुण)

(iv) विकर्ण AC = विकर्ण BD (सर्वांगसम त्रिभुजों के संगत भाग)

इति सिद्धम्।

16. ज्ञात है : $ABCD$ एक वर्ग है जिसकी भुजाओं के मध्य बिन्दु P, Q, R, S से एक चतुर्भुज $PQRS$ बनता है।

सिद्ध करना है : चतुर्भुज $PQRS$ एक वर्ग है।



उपपत्ति : ΔAPS और ΔBPQ में,

$AP = BP,$ [P, AB का मध्य बिन्दु है]

$AS = BQ,$ [$\because AD = BC$ और Q तथा S मध्य बिन्दु हैं]

$\angle PAS = \angle PBQ$ [प्रत्येक समकोण]

$\therefore$ $\Delta APS \cong \Delta BPQ$

अतः $PS = PQ$ ...(1)

इसी प्रकार ΔAPS और ΔDSR में,

$PS = SR$ ...(2)

और ΔBPQ और ΔCQR में,

$PQ = QR$ ...(3)

समीकरण (1), (2) व (3) से,

$PS = PQ = QR = SR$

अतः $PQRS$ एक चतुर्भुज है जिसकी भुजाएँ बराबर हैं।

अब ΔAPS में,

$\angle APS + \angle ASP + \angle PAS = 180^\circ$

$\angle APS + \angle ASP + 90^\circ = 180^\circ$

$\angle APS + \angle ASP = 180^\circ - 90^\circ$

$\angle APS + \angle ASP = 90^\circ$

$\because$ $AP = AS$

$\therefore$ $\angle APS = \angle ASP = 45^\circ$

अतः $\angle APS = 45^\circ$

इसी प्रकार ΔBPQ में ,

$\angle BPQ = 45^\circ$

$\because$ $\angle APS + \angle SPQ + \angle BPQ = 180^\circ$

$45^\circ + \angle SPQ + 45^\circ = 180$

$\angle SPQ = 180^\circ - 90^\circ$

$\angle SPQ = 90^\circ$

पुनः इसी प्रकार

$\angle PQR = 90^\circ$

$\angle QRS = 90^\circ$

$\angle RSP = 90^\circ$

$\because$ चतुर्भुज $PQRS$ ऐसा समान्तर चतुर्भुज है जिसकी चारों भुजाएँ बराबर और प्रत्येक अन्तःकोण समकोण है।

$\therefore$ चतुर्भुज $PQRS$ वर्ग है। **यही सिद्ध करना था।**