अध्याय 5

यूक्लिड की ज्यामिति का परिचय
(Introduction to Euclid's Geometry)

बहुविकल्पीय प्रश्न

1. सही विकल्प (A)

तीन चरण ठोस–पृष्ठ–रेखाएँ–बिन्दु हैं।

2. सही विकल्प (C)

एक ठोस में आकृति, आकार और स्थिति होती है और इसे एक स्थान से दूसरे स्थान पर ले जाया जा सकता है। इसलिए, एक ठोस की तीन विमाएँ होती हैं।

3. सही विकल्प (B)

एक पृष्ठ की दो विमाएँ होती हैं।

4. सही विकल्प (A)

यूक्लिड के अनुसार, एक बिन्दु वह है जिसका कोई भाग (हिस्सा) नहीं होता है अर्थात् न लम्बाई, न चौड़ाई और न ऊँचाई होती है।

इसलिए, इसकी कोई विमा नही होती है।

5. सही विकल्प (A)

यूक्लिड ने अपनी प्रसिद्ध कृति ''एलीमेंट्स को 13 अध्यायों में विभाजित किया।

6. सही विकल्प (A)

एलीमेंट्स में साध्यों की कुल संख्या 465 है।

7. सही विकल्प (A)

ठोसों की परिसीमाएँ पृष्ठ हैं।

8. सही विकल्प (B)

पृष्ठों की परिसीमाएँ वक्र हैं।

9. सही विकल्प (B)

निर्माण कार्य के लिए उपयोग की जाने वाली ईंटों की विमाओं का अनुपात 4 : 2 : 1 था।

10. सही विकल्प (D)

पिरामिड एक ठोस आकृति है जिसका आधार कोई भी बहुभुज होता है।

11. सही विकल्प (A)

एक पिरामिड के पार्श्व फलक त्रिभुज होते हैं।

12. सही विकल्प (B)

यदि $x + y = 10$ हो तो $x + y + z = 10 + z$ होगा। यूक्लिड की दूसरी अभिगृहीत में कहा गया कि अगर बराबरों में बराबर जोड़ा जाए तो परिणाम बराबर होता है।

13. सही विकल्प (A)

प्राचीन भारत में, घरेलू पूजा कार्य में प्रयोग की जाने वाली वेदियों के आकार वर्ग और वृत्त होते थे।

14. सही विकल्प (C)

(अथर्ववेद में दिए) 'श्रीयंत्र' में एक–दूसरे के साथ जुड़े अंतर्निहित समद्विबाहु त्रिभुजों की संख्या नौ है।

15. सही विकल्प (B)

यूनानी उन बयानों की सच्चाई को स्थापित करने में रूचि रखते थे, जो उन्होंने निगमन तर्कण का उपयोग करके खोज की थी एक यूनानी गणितज्ञ थेल्स को ज्ञान प्रमाण देने का श्रेय दिया जाता है।

16. सही विकल्प (A)

प्राचीन भारत में, आयतों, त्रिभुजों और समलम्बों से संयोजित आकारों की वेदियाँ सार्वजनिक पूजा स्थल में प्रयोग होती थीं।

17. सही विकल्प (C)

यूक्लिड यूनान देश के वासी थे।

18. सही विकल्प (C)

थेल्स यूनान देश के वासी थे।

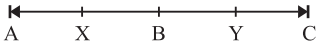
19. सही विकल्प (A)

पाइथागोरस थेल्स के विद्यार्थी थे।

20. सही विकल्प (A)

प्रमेय को उपपत्ति की आवश्यकता है।

21.



$\because$ AX = BX (दिया है) तथा BY = YC और AX = CY (दिया है)

तब BX = CY परन्तु AC = BC नहीं होगा।

अतः विकल्प (D) सही है।

22. $\because$ $\angle ABC = \angle ACB$ (दिया है)

$\therefore$ $\angle 1 + \angle 4 = \angle 2 + \angle 3$

या $\angle 1 + \angle 3 = \angle 2 + \angle 3$ [$\because \angle 3 = \angle 4$, दिया है]

अतः $\angle 1 = \angle 2$

अतः विकल्प (A) सही है।

वर्णनात्मक प्रश्न

अति लघु उत्तरीय प्रश्न :

1. प्रश्नानुसार

$$AC = BD \quad ...(i)$$

$$AC = AB + BC \quad ...(ii)$$

[$\therefore$ बिन्दु B, बिन्दुओं A और C के बीच स्थित है]

या $$BD = BC + CD \quad ...(iii)$$

[$\therefore$ बिन्दु C, B और D के बीच स्थित है]

समीकरण (ii) व (iii) का मान (i) में प्रतिस्थापित करने पर,

$$AB + BC = BC + CD$$

दोनों पक्षों में से BC घटाने पर,

$$AB + BC - BC = BC + CD - BC = BC - BC + CD$$

या $$AB = CD$$

यूक्लिड की अभिगृहीत बराबरों में से बराबरों को घटाने पर शेषफल भी बराबर होता है।

2. यूक्लिड की अभिगृहीत 5 के अनुसार, ''एक पूर्ण अपने भाग से बड़ा होता है।'' इस अभिगृहीत को एक सर्वव्यापी सत्य इसलिए माना जाता है क्योंकि विश्व के किसी भाग में किसी भी वस्तु के लिए यह सत्य होता है।

लघु उत्तरीय प्रश्न :

1. दी गई आकृति में, $AB + BC$ के मध्य AC संपाती है।

साथ ही, यूक्लिड का अभिगृहीत (4) कहता है कि वे वस्तुएँ जो परस्पर संपाती हों एक-दूसरे के बराबर होती हैं। अतः यह सिद्ध किया जा सकता है कि

$$AB + BC = AC$$

है। ध्यान दीजिए कि इस हल में यह मान लिया गया है कि दो बिंदुओं से होकर एक अद्वितीय रेखा खींची जा सकती है।

2. प्रश्नानुसार दिया गया है कि एक बिन्दु C, बिन्दु A व B के बीच स्थित है तभी AC = BC हो सकता है।

दोनों पक्षों में AC जोड़ने पर,

$$AC + AC = AC + BC$$

यहाँ यूक्लिड की परिभाषा के अनुसार बराबरों को बराबरों में जोडा गया है। अतः

$$2AC = AB \qquad [\because BC + AC, AB \text{ के संपाती है।}]$$

$$\Rightarrow \quad AC = \frac{1}{2} AB.$$

3. प्रश्न में दी गई मान्यता के विपरीत हम यह मान लेते हैं कि AB रेखाखण्ड के दो मध्य बिन्दु C और D हैं। अतः यूक्लिड की अभिगृहीत (4) के अनुसार जब रेखा को C बिन्दु पर मोड़ा जाता है तो हम देखेंगे कि भाग BC भाग AC पर अध्यारोपित होता है।

अर्थात् $$AC = BC \qquad ...(i)$$

इसी प्रकार बिन्दु D भी AB का मध्य बिन्दु है।

अर्थात् $$AD = BD \qquad ...(ii)$$

$$AB = AB, \qquad \text{(दिया है)}$$

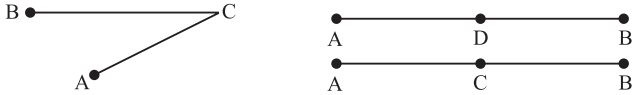
या $$AC + CB = AD + BD$$

या $$AC + BC = AD + BD$$

या $$AC + AC = AD + AD \qquad [\text{(i) व (ii) का प्रयोग करने पर}]$$

या $$2AC = 2AD \quad \text{या} \quad AC = AD$$

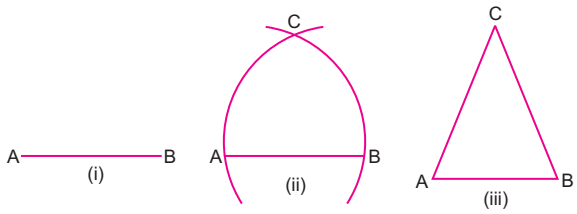
जब हमने AD को AC पर और BD को BC पर अध्यारोपित किया तो हमने देखा कि D पूरी तरह से CB को ढक लेता है या ठीक उसी के ऊपर आता है। इसका अर्थ यह हुआ कि D तथा C दो बिन्दु न होकर एक ही बिन्दु है।



इस प्रकार इस निष्कर्ष पर पहुँचा गया कि एक रेखा खण्ड का केवल एक ही मध्य बिन्दु हो सकता है।

दीर्घ उत्तरीय प्रश्न :

1. प्रदत्त कथन में, एक दी हुई लम्बाई का एक रेखाखंड, मान लीजिए, AB दिया है [देखिए आकृति]।



यूक्लिड की अभिधारणा (3) के अनुसार, बिंदु A को केन्द्र और AB त्रिज्या लेकर एक वृत्त खींच सकते हैं [देखिए आकृति]। इसी प्रकार, B को केन्द्र मानकर और BA त्रिज्या लेकर एक अन्य वृत्त खींचा जा सकता है। ये दोनों वृत्त मान लीजिए बिंदु C पर प्रतिच्छेद करते हैं। अब A को C से तथा B को C से मिलाते हुए अभीष्ट रेखाएँ खींचते हैं, जिनसे एक ΔABC की रचना होती है। [देखिए आकृति]।

इसलिए आपको सिद्ध करना है कि यह त्रिभुज एक समबाहु त्रिभुज है अर्थात् $AB = AC = BC$ है।

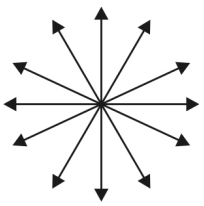
अब $AB = AC$ है क्योंकि ये एक वृत्त की त्रिज्याएँ हैं। ...(1)

इसी प्रकार $AB = BC$ (एक ही वृत्त की त्रिज्याएँ) ...(2)

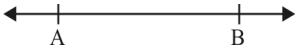
उपरोक्त दोनों तथ्यों और यूक्लिड के पहले अभिगृहीत (वे वस्तुएँ जो एक ही वस्तु के बराबर होती हैं एक दूसरे के बराबर होती हैं) से आप निष्कर्ष निकाल सकते हैं कि $AB = BC = AC$ है।

अतः ΔABC एक समबाहु त्रिभुज है।

2. (i) यह कथन असत्य है, क्योंकि यह स्वयंसिद्ध है कि एक बिन्दु से होकर असीमित रूप से अनेक रेखाएँ खींची जा सकती हैं।



(ii) यह कथन असत्य है, क्योंकि दिया गया यह कथन यूक्लिड के अभिगृहीत 1 का विरोधाभासी कथन है क्योंकि इस कथन में कहा गया है कि ''दिए हुए दो भिन्न बिन्दुओं से होकर असंख्य रेखाएँ खींची जा सकती हैं।''



उपर्युक्त चित्र के अनुसार हम देख सकते हैं कि दो बिन्दुओं A तथा B में से एक अद्वितीय रेखा खींची जा सकती है।

(iii) यह कथन सत्य है। यूक्लिड की अभिधारणा 2 के अनुसार ''एक सांत रेखा को अनिश्चित रूप से बढ़ाया जा सकता है।'' जैसा कि निम्न चित्र में दिखाया गया है कि रेखा RS को अनिश्चित रूप से बढ़ाया जा सकता है।

(iv) यह कथन सत्य है। यूक्लिड के अभिगृहीत 4 के अनुसार, ''वे वस्तुएँ जो परस्पर संपाती हों, एक–दूसरे के बराबर होती हैं।'' प्रश्न के कथन में दिए अनुसार वृत्त आपस में बराबर हैं। इससे यह भी प्रमाणित होता है कि इन वृत्तों की त्रिज्याएँ भी बराबर होंगी।

(v) आकृति द्वारा दिया गया कथन सत्य है। यूक्लिड के अभिगृहीत 1 के अनुसार ''वे वस्तुएँ जो एक ही वस्तु के बराबर हों, एक–दूसरे के बराबर होती है।''

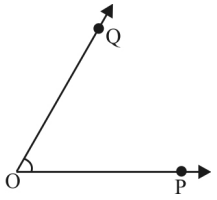
3. (i) **समान्तर रेखाएँ**–समान्तर रेखाएँ वे सीधी एवं सरल रेखाएँ होती हैं जो एक तल में होती हैं तथा दोनों दिशाओं में असीमित लम्बाई तक बढ़ाने पर भी कभी भी आपस में नहीं मिलती हैं। जैसा कि निम्न चित्र में रेखा l व m को दर्शाया गया है।

समान्तर रेखाओं को $l \parallel m$ द्वारा लिखा जाता है।

समान्तर रेखाओं को परिभाषित करने पर पद समतल आता है। यह एक अपरिभाषित पद है। इस पद को अन्त:प्रेरणा से ही समझा जा सकता है जैसे चिकनी दीवार की सतह, एक बड़े कागज की सतह, श्यामपट्ट का चिकना तल आदि। कल्पना यह करनी पड़ती है कि सतह को उसके आयाम के अनुसार असीमित सीमाओं तक बढ़ाया जा सकता है।

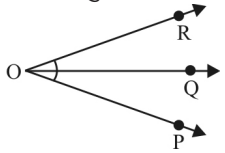
(ii) लम्ब रेखाएँ–यदि एक सरल रेखा किसी अन्य सरल रेखा पर इस प्रकार मिले कि बनने वाले आसन्न कोण आपस में बराबर या समान हों तो बनने वाला प्रत्येक कोण समकोण होगा तथा सरल रेखा जो अन्य रेखा पर मिल रही है, उस पर लम्ब रेखा कहलाती है। इससे सम्बन्धित कुछ अन्य पद निम्नलिखित हैं–

(A) कोण–कोई भी दो किरणें जिनका प्रारम्भिक बिन्दु एक ही हो, कोण बनाती हैं, अर्थात् इसे इस तरह भी परिभाषित किया जा सकता है कि यदि किसी एक बिन्दु से दो किरणें निकलें तो बनने वाली आकृति कोण कहलाएगी।

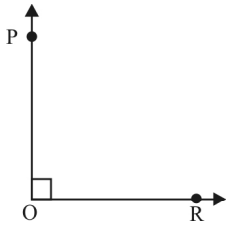


जैसे–चित्र में प्रारम्भिक बिन्दु O से दो किरणें $\overrightarrow{OP}$ तथा $\overrightarrow{OQ}$ निकल रही हैं, तथा आकृति POQ या QOP बना रही है। इस आकृति को बिन्दु O पर बनने वाला कोण कहते हैं तथा इसे $\angle$ POQ या $\angle$ QOP लिखा जाता है।

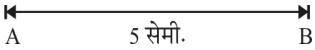
(B) आसन्न कोण–ऐसे दो कोण जिनका शीर्ष एवं एक भुजा उभयनिष्ठ हो, आसन्न कोण कहलाते हैं। निम्न चित्र में $\angle$ POQ तथा $\angle$ ROQ आसन्न कोण हैं। इनमें शीर्ष O एवं भुजा OQ उभयनिष्ठ है।



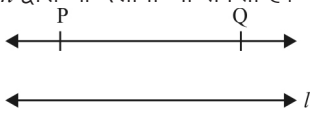
(C) समकोण–ऐसा कोण जिसकी माप 90° के बराबर हो, समकोण कहलाता है। या यह भी कहा जा सकता है कि एक ऐसा कोण एक बिन्दु पर बनने वाले सम्पूर्ण कोणों के योग का चौथाई हो, समकोण कहलाता है।



(iii) रेखाखण्ड–एक ऐसी आकृति जिसकी लम्बाई सीमित हो, तथा यदि चाहें तो उसे दोनों ओर असीमित लम्बाई तक बढ़ाया जा सके, रेखाखण्ड कहलाती है। इससे सम्बन्धित अन्य पद रेखा है, जिसे परिभाषित करने की आवश्यकता है।



रेखा–यदि हम कागज के टुकड़े को मोड़ें तो कागज की तह पर एक रेखा बन जाती है। बिन्दु की तरह रेखा को भी एक संकल्पना के रूप मे स्वीकार किया गया है। चित्र में PQ एक रेखा है जिसे $\overleftrightarrow{PQ}$ द्वारा भी प्रदर्शित कर सकते हैं। रेखा को अंग्रेजी वर्णमाला के छोटे अक्षरों जैसे *l*, *m*, *n* द्वारा भी दर्शाया जा सकता है।



(iv) वृत्त की त्रिज्या–किसी बिन्दु से वृत्त की परिधि तक की स्थिर दूरी को वृत्त की त्रिज्या कहते हैं। अर्थात् एक ऐसा रेखाखण्ड जो वृत्त की परिधि के किसी भी बिन्दु को केन्द्र से मिलाता है, वृत्त की त्रिज्या कहलाती है। इससे सम्बन्धित निम्नलिखित पदों को परिभाषित करने की आवश्यकता है।

(A) वृत्त–एक तल पर उन सभी बिन्दुओं का समूह, जो तल के एक स्थिर बिन्दु से एक स्थिर दूरी पर स्थित हों, एक वृत्त कहलाता है।

(B) वृत्त का केन्द्र–किसी भी वृत्त का वह स्थिर बिन्दु जिससे वृत्त पर स्थित समस्त बिन्दु एकसमान दूरी पर हों, वृत्त का केन्द्र कहलाता है।

(v) वर्ग–ऐसी चतुर्भुजाकार आकृति जिसमें समस्त भुजाएँ एवं समस्त कोण समान हों, वर्ग कहलाती हैं। किसी भी वर्ग में–

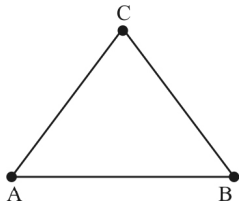
(a) चारों भुजाएँ बराबर होती हैं। (b) प्रत्येक कोण समकोण होता है। (c) विकर्ण बराबर होते हैं। (d) विकर्ण परस्पर समकोण पर समद्विभाजित करते हैं। (e) प्रत्येक विकर्ण भुजा के साथ 45° का कोण बनाता है।

4. प्रश्नानुसार दी गई अभिधारणाओं में एक अपरिभाषित शब्द बिन्दु है जिसकी छात्र को जानकारी होनी चाहिए। बिन्दु के अतिरिक्त रेखा भी अपरिभाषित शब्द है किन्तु इसका वर्णन महत्वपूर्ण बिन्दु के अन्तर्गत दिया गया है।

बिन्दु–बिन्दु की संकल्पना को निम्नलिखित उपकरणों द्वारा समझा जा सकता है। एक बारीक पेन्सिल द्वारा लगाया गया सूक्ष्म चिन्ह, श्यामपट्ट का कोना तथा एक बिन्दु के मिलते–जुलते उदाहरण हैं। पेन्सिल का कोना जितना अधिक बारीक होगा, उसके द्वारा बनाया गया चिन्ह उतना ही अच्छा बिन्दु होता है। साधारणतः बिन्दु को अंग्रेजी वर्णमाला के बड़े अक्षरों अर्थात् A, B, C, D आदि द्वारा दर्शाया जाता है।

प्रश्न में दी गई दोनों अभिधारणाएँ (i) तथा (ii) संगत है क्योंकि इनमें दो अलग–अलग स्थितियों का अध्ययन किया जाता है। अभिधारणा (i) में कथन दिया है कि यदि दो बिन्दु A और B दिए हुए हों, तो उनके बीच में एक बिन्दु C होता है जिसे निम्न प्रकार दर्शाया जा सकता है।

अभिधारणा (ii) का कथन है कि यहाँ कम–से–कम तीन ऐसे बिन्दु विद्यमान हैं कि वे एक रेखा पर स्थित नहीं हैं। इसके लिए दो दिए हुए बिन्दुओं A और B के लिए हम एक बिन्दु C ले सकते हैं जो A तथा B से होकर जाने वाली रेखा पर स्थित नहीं होता।



इस प्रकार हम देखते हैं कि ये दोनों अभिगृहीत यूक्लिड की अभिगृहीतों का अनुसरण नहीं करते। फिर भी ये अभिगृहीत 5.1 का अनुसरण करते हैं। इस अभिगृहीत के अनुसार दिए गए दो भिन्न बिन्दुओं के लिए भिन्न एक अद्वितीय रेखा होती है जो उनमें से होकर जाती है।