अध्याय 2

बहुपद
(Polynomials)

बहुविकल्पीय प्रश्न

1. सही विकल्प (C)
2. सही विकल्प (B)
3. सही विकल्प (A)
4. सही विकल्प (D)
5. सही विकल्प (B)
6. सही विकल्प (A)
7. सही विकल्प (D)
8. सही विकल्प (C)
9. सही विकल्प (B)
10. सही विकल्प (B)
11. सही विकल्प (C)
12. सही विकल्प (B)
13. सही विकल्प (D)
14. सही विकल्प (D)
15. सही विकल्प (D)
16. सही विकल्प (D)
17. सही विकल्प (C)
18. सही विकल्प (C)
19. सही विकल्प (C)
20. सही विकल्प (D)
21. सही विकल्प (A)
22. सर्वसामिका $(a + b)^2 = (a)^2 + (b^2) + 2 \times a \times b = a^2 + b^2 + 2ab$

अतः विकल्प (B) सही है। **उत्तर**

23. $$(x + y)^3 = (x + y)(x + y)(x + y)$$
$$= (x + y)^2 (x + y) = (x^2 + y^2 + 2xy)(x + y)$$

$= x^2(x + y) + y^2(x + y) + 2xy\,(x + y)$
$= x^3 + x^2y + xy^2 + y^3 + 2x^2y + 2xy^2$
$= x^3 + y^3 + 3x^2y + 3xy^2 = x^3 + y^3 + 3xy(x + y)$

अतः विकल्प (B) सही है। **उत्तर**

24. शिक्षकों की संख्या, $x + y = 10$ ...(i)

लड़कियों की संख्या, $x^2 + y^2 = 58$ ...(ii)

समी. (i) से $y = 10 - x$ हो, तब $x^2 + (10 - x)^2 = 58$ [समी. (ii) से]

अर्थात् $x^2 - 10x + 21 = 0 \Rightarrow (x - 3)\,(x - 7) = 0$

जब $x = 3$ हो, तब $y = 7$ और जब $x = 7$ हो तब $y = 3$

तब लड़कों की संख्या $= x^3 + y^3 = (3)^3 + (7)^3$ या $(7)^3 + (3)^3 = 370$.

अतः विकल्प (D) सही है। **उत्तर**

25. $x - y = 23$ ...(i)

तथा शिक्षकों की संख्या, $(x + y) = 10$ ...(ii)

तब $x^2 - y^2 = (x + y)\,(x - y)$

समी. (i) तथा (ii) से $x^2 - y^2 = (10)\,(23) = 230$.

अतः विकल्प (D) सही है। **उत्तर**

26. चूँकि दी गई घटना बहुपद पर आधारित है। अतः विकल्प (C) सही है। **उत्तर**

वर्णनात्मक प्रश्न

अति लघु उत्तरीय प्रश्न :

1. (i) चर का अधिकतम घातांक 5 है। अतः बहुपद की घात 5 है।

(ii) चर का अधिकतम घातांक 8 है। अतः बहुपद की घात 8 है।

2. 35 घात का द्विपद $= 3x^{35} - y$

100 घात का एकपदी द्विपद $= \sqrt{2}y^{100}$.

3. $49a^2 + 70ab + 25b^2 = (7a)^2 + 2 \times 7a \times 5b + (5b)^2$
$= (7a + 5b)^2$.

4. सार्वसमिका $(x + y + z)^2 = x^2 + y^2 + z^2 + 2xy + 2yz + 2zx$ के प्रयोग से

$(x + 2y + 4z)^2 = (x)^2 + (2y)^2 + (4z)^2 + 2(x)\,(2y) + 2(2y)\,(4z) + 2(x)\,(4z)$
$= x^2 + 4y^2 + 16z^2 + 4xy + 16yz + 8xz.$ **उत्तर**

5. $(2x - y + z)^2 = (2x)^2 + (-y)^2 + (z)^2 + 2(2x)\,(-y) + 2\,(-y)\,(z) + 2(z)\,(2x)$
$= 4x^2 + y^2 + z^2 - 4xy - 2yz + 4zx.$ **उत्तर**

6. $(-2x + 3y + 2z)^2 = (-2x)^2 + (3y)^2 + (2z)^2 + 2\,(-2x)\,(3y) + 2(3y)\,(2z) + 2\,(-2x)\,(2z)$
$= 4x^2 + 9y^2 + 4z^2 - 12xy + 12yz - 8xz.$ **उत्तर**

7. $(3a - 7b - c)^2 = (3a)^2 + (-7b)^2 + (-c)^2 + 2(3a)\,(-7b) + 2(-7b)\,(-c) + 2(-c)\,(3a)$
$= 9a^2 + 49b^2 + c^2 - 42ab + 14bc - 6ca.$ **उत्तर**

8. $(-2x + 5y - 3z)^2 = (-2x)^2 + (5y)^2 + (-3z)^2 + 2(-2x)\,(5y) + 2(5y)\,(-3z) + 2(-3z)\,(-2x)$
$= 4x^2 + 25y^2 + 9z^2 - 20xy - 30yz + 12zx.$ **उत्तर**

9. $\left(\frac{1}{4}a-\frac{b}{2}+1\right)^2=\left(\frac{1}{4}a\right)^2+\left(-\frac{1}{2}b\right)^2+(1)^2+2\left(\frac{1}{4}a\right)\left(-\frac{1}{2}b\right)+2\left(-\frac{1}{2}b\right)(1)+2(1)\left(\frac{1}{4}a\right)$

$=\frac{1}{16}a^2+\frac{1}{4}b^2+1-\frac{1}{4}ab-b+\frac{1}{2}a.$ उत्तर

10. $4x^2+9y^2+16z^2+12xy-24yz-16xz$

$=(2x)^2+(3y)^2+(-4z)^2+2(2x)(3y)+2(3y)(-4z)+2(-4z)(2x)$

$=(2x+3y-4z)^2.$ उत्तर

11. $2x^2+y^2+8z^2-2\sqrt{2}xy+4\sqrt{2}yz-8xz.$

$=(-\sqrt{2}x)^2+(y)^2+(2\sqrt{2}z)^2+2(-\sqrt{2}x)(y)+2(y)(2\sqrt{2}z)+2(2\sqrt{2}z)(-\sqrt{2}x)$

$=(-\sqrt{2}x+y+2\sqrt{2}z)^2.$ उत्तर

12. $27y^3+125z^3=(3y)^3+(5z)^3$

$=(3y+5z)[(3y)^2-(3y(5z)+(5z)^2]$

$=(3y+5z)(9y^2-15yz+25z^2).$ उत्तर

13. $64m^3-343n^3=(4m)^3-(7n)^3$

$=(4m-7n)[(4m)^2+(4m)(7n)+(7n)^2]$

$=(4m-7n)(16m^2+28mn+49n^2).$ उत्तर

14. $27x^3+y^3+z^3-9xyz=(3x)^3+(y)^3+(z)^3-3(3x)(y)(z)$

$=(3x+y+z)[(3x)^2+(y)^2+(z)^2-(3x)(y)-(y)(z)-(3x)(z)]$

$=(3x+y+z)(9x^2+y^2+z^2-3xy-yz-3xz).$ उत्तर

15. $8a^3+b^3+12a^2b+6ab^2=(2a)^3+b^3+3(2a)(b)(2a+b)=(2a+b)^3.$ उत्तर

16. $8a^3-b^3-12a^2b+6ab^2=(2a)^3-(b)^3-3(2a)(b)(2a-b)=(2a-b)^3.$ उत्तर

17. $27-125a^3-135a+225a^2=(3)^3-(5a)^3-3(3)(5a)(3-5a)=(3-5a)^3.$ उत्तर

18. $64a^3-27b^3-144a^2b+108ab^2=(4a)^3-(3b)^3-3(4a)(3b)(4a-3b)=(4a-3b)^3.$ उत्तर

19. $27p^3-\frac{1}{216}-\frac{9}{2}p^2+\frac{1}{4}p=(3p)^3-\left(\frac{1}{6}\right)^3-3(3p)\left(\frac{1}{6}\right)\left(3p-\frac{1}{6}\right)$

$=\left(3p-\frac{1}{6}\right)^3.$ उत्तर

20 $x^2-\frac{y^2}{100}=(x)^2-\left(\frac{y}{10}\right)^2=\left(x-\frac{y}{10}\right)\left(x+\frac{y}{10}\right).$ उत्तर

लघु उत्तरीय प्रश्न :

1. (i) $5x^3+4x^2+7x$ में चर x की अधिकतम घात 3 है। अत: बहुपद की घात 3 है।

(ii) $4-y^2$ में चर y की अधिकतम घात 2 है। अत: बहुपद की घात 2 है।

(iii) $5t-\sqrt{7}$ में चर t की अधिकतम घात 1 है। अत: बहुपद की घात 1 है।

(iv) 3 या $3x^0$ में चर की घात शून्य है। अत: बहुपद की घात शून्य है।

2. मान लीजिए $p(x) = x + 2$

तब $p(2) = 2 + 2 = 4$, तथा $p(-2) = -2 + 2 = 0$

अतः -2 बहुपद $x + 2$ का एक शून्यक है, परन्तु 2 बहुपद $x + 2$ का शून्यक नहीं है।

3. चूँकि हम जानते हैं कि जब बहुपद का मान शून्य हो जाता है तभी बहुपद का शून्यक ज्ञात कर सकते हैं।

$\therefore$ $p(x) = 0$

अतः $2x + 1 = 0$

$\Rightarrow$ $2x = -1$

$\Rightarrow$ $x = -\dfrac{1}{2}$

अतः $-\dfrac{1}{2}$, बहुपद $2x + 1$ का एक शून्यक है।

4. माना कि $p(x) = x^2 - 2x$

अब $p(2) = 2^2 - 4 = 4 - 4 = 0$

तथा $p(0) = 0 - 0 = 0$

अतः 2 और 0 दोनों ही बहुपद $x^2 - 2x$ के शून्यक हैं।

5. (i) $4x^2 + 20x + 25$

$= (2x)^2 + (5)^2 + 2 \times 2x \times 5$

सर्वसमिका $(a + b)^2 = a^2 + b^2 + 2ab$ के प्रयोग से

$= (2x + 5)^2$.

(ii) $9y^2 - 66yz + 121z^2$

$= (3y)^2 + (11z)^2 - 2 \times 3y \times 11z$

सर्वसमिका $(a - b)^2 = a^2 + b^2 - 2ab$ के प्रयोग से

$= (3y - 11z)^2$.

6. $$\frac{25}{4}x^2 - \frac{y^2}{9} = \left(\frac{5}{2}x\right)^2 - \left(\frac{y}{3}\right)^2$$

$$= \left(\frac{5}{2}x - \frac{y}{3}\right)\left(\frac{5}{2}x + \frac{y}{3}\right).$$

7. चूँकि $x + 2$ एक गुणनखण्ड हो, तब $x = -2$ रखने पर,

$p(x) = x^3 + 3x^2 + 5x + 6$ और $s(x) = 2x + 4$

तब, $p(-2) = (-2)^3 + 3(-2)^2 + 5(-2) + 6$

$= -8 + 12 - 10 + 6 = 0$

अतः गुणनखण्ड प्रमेय (Factor Theorem) के अनुसार $x + 2$, $x^3 + 3x^2 + 5x + 6$ का एक गुणनखण्ड है।

पुनः $s(-2) = 2(-2) + 4 = 0$

अतः $x + 2$, $2x + 4$ का भी एक गुणनखण्ड है। अतः गुणनखण्ड प्रमेय से $2x + 4 = 2(x + 2)$ है।

8. $105 \times 106 = (100 + 5) \times (100 + 6)$

$= (100)^2 + (5 + 6)(100) + (5 \times 6)$

$\because (x + a)(x + b) = x^2 + (a + b)x + ab$ के प्रयोग से,

$= 10000 + 1100 + 30$

$= 11130.$

9. $\because (4a - 2b - 3c)^2 = \{4a + (-2b) + (-3c)\}^2$

$= (4a)^2 + (-2b)^2 + (-3c)^2 + 2(4a)(-2b) + 2(-2b)(-3c) + 2(4a)(-3c)$

$= 16a^2 + 4b^2 + 9c^2 - 16ab + 12bc - 24ac.$

10. $(3a + 4b + 5c)^2 = (3a)^2 + (4b)^2 + (5c)^2 + 2(3a)(4b) + 2(4b)(5c) + 2(5c)(3a)$

$= 9a^2 + 16b^2 + 25c^2 + 24ab + 40bc + 30ac.$

11. $a^3 - 8b^3 - 64c^3 - 24abc = (a)^3 + (-2b)^3 + (-4c)^3 - 3 \times a(-2b)(-4c)$

$= \{a + (-2b) + (-4c)\}\{a^2 + (-2b)^2 + (-4c)^2 - a(-2b)$

$- (-2b)(-4c) - (-4c)(a)\}$

$= (a - 2b - 4c)(a^2 + 4b^2 + 16c^2 + 2ab - 8bc + 4ac).$

12. माना $a = x - 2y,\ b = 2y - 3z,\ c = 3z - x$

तब $a + b + c = x - 2y + 2y - 3z + 3z - x = 0$

$\therefore$ $a^3 + b^3 + c^3 = 3abc$

$\Rightarrow (x - 2y)^3 + (2y - 3z)^3 + (3z - x)^3 = 3(x - 2y)(2y - 3z)(3z - x).$

13. $8x^3 + y^3 + 27z^3 - 18xyz = (2x)^3 + y^3 + (3z)^3 - 3(2x)(y)(3z)$

$= (2x + y + 3z)[(2x)^2 + y^2 + (3z)^2 - (2x)(y) - (y)(3z) - (2x)(3z)]$

$= (2x + y + 3z)(4x^2 + y^2 + 9z^2 - 2xy - 3yz - 6xz).$

14. दिया है: $8x^3 + 27y^3 + 36x^2y + 54xy^2$

$= (2x)^3 + (3y)^3 + 3 \times (2x)^2 \times (3y) + 3 \times (2x) \times (3y)^2$

$= (2x)^3 + (3y)^3 + 3(2x)(3y)[2x + 3y]$

$= (2x + 3y)^3$ [सर्वसमिका (iii) के प्रयोग से]

$= (2x + 3y)(2x + 3y)(2x + 3y).$

15. $4x^2 + y^2 + z^2 - 4xy - 2yz + 4xz = (2x)^2 + (-y)^2 + (z)^2 + 2(2x)(-y) + 2(-y)(z) + 2(z)(2x)$

$= [2x + (-y) + z]^2$

$= (2x - y + z)^2.$

16. $2x^2 + 7x + 3 = 2x^2 + 6x + x + 3 = 2x(x + 3) + 1(x + 3)$

$= (x + 3)(2x + 1).$ उत्तर

17. $6x^2 + 5x - 6 = 6x^2 + 9x - 4x - 6 = 3x(2x + 3) - 2(2x + 3)$

$= (2x + 3)(3x - 2).$ उत्तर

18. $3x^2 - x - 4 = 3x^2 - 4x + 3x - 4$

$= x(3x - 4) + 1(3x - 4)$

$= (3x - 4)(x + 1).$ उत्तर

19. $12x^2 - 7x + 1 = 12x^2 - 4x - 3x + 1$

$= 4x(3x - 1) - 1(3x - 1)$

$= (4x - 1)(3x - 1).$ उत्तर

20. (i) $(2x + 1)^3 = (2x)^3 + (1)^3 + 3(2x)(1)(2x + 1)$

$= 8x^3 + 1 + 6x(2x + 1)$

$= 8x^3 + 1 + 12x^2 + 6x$

$= 8x^3 + 12x^2 + 6x + 1.$ उत्तर

(ii) $(2a - 3b)^3 = (2a)^3 - 3(2a)^2(3b) + 3(2a)(3b)^2 - (3b)^3$

$= 8a^3 - 36a^2b + 54ab^2 - 27b^3.$ उत्तर

21. (i) $\left(\frac{3}{2}x+1\right)^3 = \left(\frac{3}{2}x\right)^2 + 3\left(\frac{3}{2}x\right)^2 + 3\left(\frac{3}{2}x\right)(1)^2 + (1)^3$

$= \frac{27}{8}x^3 + \frac{27}{4}x^2 + \frac{9}{2}x + 1 \cdot$ उत्तर

(ii) $\left(x - \frac{2}{3}y\right)^3 = (x)^3 - \left(\frac{2}{3}y\right)^3 - 3 \times x \times \frac{2}{3}y\left(x - \frac{2}{3}y\right)$

$= x^3 - \frac{8}{27}y^3 - 2xy \times x + 2xy \times \frac{2}{3}y$

$= x^3 - \frac{8}{27}y^3 - 2x^2y + \frac{4}{3}xy^2 \cdot$ उत्तर

22. $(99)^3 = (100 - 1)^3$

सर्वसमिका $(a - b)^3 = a^3 - b^3 - 3ab(a - b)$ के अनुसार

$\therefore$ $(100 - 1)^3 = (100)^3 - (1)^3 - 3(100)(1)(100 - 1)$

$= 1000000 - 1 - 30000 + 300 = 970299.$ उत्तर

23. $(998)^3 = (100 - 2)^3$

सर्वसमिका $(a - b)^3 = a^3 - b^3 - 3ab(a - b)$ के अनुसार

$(1000 - 2)^3 = (1000)^3 - (2)^3 - 3(1000)(2)(1000 - 2)$

$= 1000000000 - 8 - 6000(1000 - 2)$

$= 994011992.$ उत्तर

24. $(102)^3 = (100 + 2)^3$

$\therefore$ $(100 + 2)^3 = (100)^3 + (2)^3 + 3(100)(2)(100 + 2)$

$= 1000000 + 8 + 600(100 + 2)$

$= 1000000 + 8 + 60000 + 1200 = 1061208.$ उत्तर

25. $x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz = \frac{1}{2}(x + y + z)[(x - y)^2 + (y - z)^2 + (z - x^2)]$

R.H.S. $= \frac{1}{2}(x + y + z)[(x - y)^2 + (y - z)^2 + (z - x)^2]$

$= \frac{1}{2}(x + y + z)[x^2 + y^2 - 2xy + y^2 + z^2 - 2yz + z^2 + x^2 - 2xz]$

$= \frac{1}{2}(x + y + z)[2x^2 + 2y^2 + 2z^2 - 2xy - 2yz - 2zx]$

$= \frac{1}{2}(x+y+z).\ 2(x^2+y^2+z^2-xy-yz-zx)$

$= (x+y+z)\ (x^2+y^2+z^2-xy-yz-zx)$

$= x(x^2+y^2+z^2-xy-yz-zx)+y(x^2+y^2+z^2-xy-yz-zx)+z(x^2+y^2+z^2-xy-yz-zx)$

$= x^3+xy^2+xz^2-x^2y-xyz-zx^2+x^2y+y^3+yz^2-xy^2-y^2z-xyz$
$+zx^2+zy^2+z^3-xyz-yz^2-z^2x$

$= x^3+y^3+z^3-3xyz =$ L.H.S.

26. **(i)** $(-12)^3+(7)^3+(5)^3$

माना कि $a=-12,\ b=7$ तथा $c=5$

सर्वसमिका के अनुसार यदि $a+b+c=0$

तब $a^3+b^3+c^3=3abc$

$\therefore$ $a+b+c=-12+7+5=0$

$\therefore$ $(-12)^3+(7)^3+(5)^3=3(-12)\ (7)\ (5)=-1260.$ **उत्तर**

(ii) $(28)^3+(-15)^3+(-13)^3$

इसी प्रकार $(28)^3+(-15)^3+(-13)^3=3.(28\ (-15)\ (-13)=16380.$ **उत्तर**

27. **(i)** क्षेत्रफल : $25a^2-35a+12$

अर्थात् लम्बाई $\times$ चौड़ाई $= 25a^2-35a+12$

$= 25a^2-15a-20a+12$

$= 5a(5a-3)-4\ (5a-3)=(5a-4)\ (5a-3)$

$\therefore$ यदि लम्बाई $(5a-4)$ तो चौड़ाई $(5a-3)$ होगी। यदि लम्बाई $(5a-3)$ तो चौड़ाई $(5a-4)$ होगी।

(ii) प्रश्नानुसार क्षेत्रफल : $35y^2+13y-12$

अर्थात् लम्बाई $\times$ चौड़ाई $= 35y^2+13y-12$

$= 35y^2+28y-15y-12$

$= 7y(5y+4)-3(5y+4)=(5y+4)\ (7y-3)$

$\therefore$ यदि लम्बाई $(5y+4)$ तो चौड़ाई $(7y-3)$ होगी। यदि लम्बाई $(7y-3)$ तो चौड़ाई $(5y+4)$ होगी। **उत्तर**

28. **(i)** प्रश्नानुसार आयतन : $3x^2-12x$

अर्थात् लम्बाई $\times$ चौड़ाई $\times$ ऊँचाई $= 3x(x-4)$

$\therefore$ घनाभ की विमाओं के लिए संभव व्यंजक $= 3,\ x$ और $x-4$ हैं।

(ii) प्रश्नानुसार आयतन : $12ky^2+8ky-20k$

अर्थात् लम्बाई $\times$ चौड़ाई $\times$ ऊँचाई $= 4k(3y^2+2y-5)$

$= 4k[3y^2+5y-3y-5]$

$= 4k[y(3y+5)-1\ (3y+\ 5)]$

$= 4k[(3y+5)\ (y-1)]$

या लम्बाई $\times$ चौड़ाई $\times$ ऊँचाई $= 4k(3y+5\ )\ (y-1)$

$\therefore$ घनाभ की विमाओ के लिए संभव व्यंजक क्रमशः $4k,\ (3y+5)$ तथा $(y-1)$ हैं। **उत्तर**

29. माना $P(x)=5x-4x^2+3$ ....(i)

(i) समीकरण (i) में $x=0$ रखने पर,

$P(0)\ \ = 5(0)-4(0)^2+3=0-0+3=3.$ **उत्तर**

(ii) समीकरण (i) में $x=-1$ रखने पर

$P\ (-1)\ \ = 5(-1)-4(-1)^2+3=-5-4+3=-6.$ **उत्तर**

(iii) समीकरण (i) में $x = 2$ रखने पर,

$$P(2) = 5(2) - 4(2)^2 + 3 = 10 - 4(4) + 3 = 10 - 16 + 3 = -3.$$ **उत्तर**

30. (i) ज्ञात है, $p(t) = 2 + t + 2t^2 - t^3$

$$p(0) = 2 + (0) + 2(0)^2 - (0)^3 = 2 + 0 + 2(0) - 0 = 2 + 0 + 0 - 0 = 2$$

$$p(1) = 2 + (1) + 2(1)^2 - (1)^3 = 2 + 1 + 2 - 1 = 4.$$

$$p(2) = 2 + (2) + 2(2)^2 - (2)^3 = 2 + 2 + 2(4) - 8 = 2 + 2 + 8 - 8 = 4.$$ **उत्तर**

(ii) ज्ञात है, $p(x) = (x - 1)(x + 1)$

$$p(0) = (0 - 1)(0 + 1) = (-1)(1) = -1$$

$$p(1) = (1 - 1)(1 + 1) = (0)(2) = 0$$

$$p(2) = (2 - 1)(2 + 1) = (1)(3) = 3.$$ **उत्तर**

31. $p(x) = x^2 + x + k$

$$p(1) = (1)^2 + (1) + k = 0$$

$$k = -2.$$ **उत्तर**

दीर्घ उत्तरीय प्रश्न :

1. (i) $x^2 + x$ में चर x की अधिकतम घात 2 है। अतः यह एक द्विघातीय बहुपद है।

(ii) $x - x^3$ में चर x की अधिकतम घात 3 है। अतः यह एक त्रिघातीय बहुपद है।

(iii) $y + y^2 + 3$ में चर y की अधिकतम घात 2 है। अतः द्विघातीय बहुपद है।

(iv) $1 + x$ में चर x की अधिकतम घात 1 है। अतः यह एक रैखिक बहुपद है।

(v) $3t$ में चर t की अधिकतम घात 1 है। अतः यह एक रैखिक बहुपद है।

(vi) r^2 में चर x की अधिकतम घात 2 है। अतः यह एक द्विघातीय बहुपद है।

(vii) $7x^3$ में चर x की अधिकतम घात 3 है। अतः यह एक त्रिघातीय बहुपद है।

2. हमें ऐसी संख्याएँ p, q ज्ञात करनी हैं, जिससे कि $p + q = -5$ और $pq = 6$ हो।

अब p, q अवश्य ही 6 के गुणनखण्ड हैं जिनका योगफल -5 है। 6 के गुणनखण्ड निम्नलिखित हैं :

$$(-1) \times (-6), (1) \times (6), 2 \times 3, (-2) \times (-3).$$

यहि हम $p = -2$ तथा $q = -3$ लें, तो $p + q = -5$ है, जैसाकि हमें चाहिए। अतः हम मध्य पद को निम्न प्रकार से दो भागों में बाँट लेते हैं :

$$\therefore \quad y^2 - 5y + 6 = y^2 - 2y - 3y + 6$$

$$= y(y - 2) - 3(y - 2)$$

$$= (y - 2)(y - 3)$$

अतः $y^2 - 5y + 6 = (y - 2)(y - 3).$

3. $6x^2 + 17x + 5$ की तुलना $ax^2 + bx + c$ से करने पर,

$$a = 6, b = 17 \text{ तथा } c = 5$$

$a \times c = 6 \times 5 = 30$ हों, तो हम गुणनखण्ड प्राप्त कर सकते हैं।

अतः आइए हम 30 के गुणनखण्ड करते हैं, जो 1 और 30, 2 और 15, 3 और 10, 5 और 6 हैं।

इन युग्मों में, हमें 2 और 15 के युग्म से $a + b = 17$ प्राप्त होगा।

अतः $6x^2 + 17x + 5 = 6x^2 + (2 + 15)x + 5$

$$= 6x^2 + 2x + 15x + 5$$

$= 2x(3x + 1) + 5(3x + 1)$

$= (3x + 1)(2x + 5)$.

4. माना $p(x) = x^3 - 23x^2 + 142x - 120$

व्यंजक के पद 120 के गुणनखण्ड $= \pm 1, \pm 2, \pm 3, \pm 4, \pm 6, \pm 8, \pm 10, \pm 12, \pm 15, \pm 20, \pm 24, \pm 30, \pm 60$

पहले $x = 1$ व्यंजक में प्रतिस्थापित करते हैं।

शेषफल $= (1)^3 - 23 + 142 - 120$

$= 143 - 143 = 0$

अतः गुणनखण्ड प्रमेय से $(x - 1)$, $p(x)$ का एक अभीष्ट गुणनखण्ड है।

$\therefore \quad x^3 - 23x^2 + 142x - 120 = x^3 - x^2 - 22x^2 + 22x + 120x - 120$

$= x^2(x - 1) - 22x(x - 1) + 120(x - 1)$

$= (x - 1)(x^2 - 22x + 120)$

$= (x - 1)[x^2 - 12x - 10x + 120]$

$= (x - 1)[x(x - 12) - 10(x - 12)]$

$= (x - 1)[(x - 12)(x - 10)]$

$= (x - 1)(x - 10)(x - 12)$.

5. (i) $\because \quad 104^3 = (100 + 4)^3$

$= (100)^3 + (4)^3 + 3 \times 100 \times 4(100 + 4)$ (सर्वसमिका (iii) से)

$= 1000000 + 64 + 124800$

$= 1124864$.

(ii) $(999)^3 = (1000 - 1)^3$

$= (1000)^3 - (1)^3 - 3(1000)(1000 - 1)$ (सर्वसमिका (v) से)

$= 1000000000 - 1 - 2997000$

$= 997002999$.

6. (i) $(3a + 4b)^3 = (3a)^3 + (4b)^3 + 3(3a)(4b)(3a + 4b)$

$= 27a^3 + 64b^3 + 36ab(3a + 4b)$

$= 27a^3 + 64b^3 + 108a^2b + 144ab^2$.

(ii) $(5p - 3q)^3 = (5p)^3 - (3q)^3 - 3(5p)(3q)(5p - 3q)$

$= 125p^3 - 27q^3 - 45pq(5p - 3q)$

$= 125p^3 - 27q^3 - 225p^2q + 135pq^2$.

7. (i) $9x^2 + 4y^2 + 16z^2 + 12xy - 16yz - 24xz$

$= (3x)^2 + (2y)^2 + (4z)^2 + 2(6xy - 8yz - 12xz)$

$= (3x)^2 + (2y)^2 + (-4z)^2 + 2[3x \times 2y + 2y \times (-4z) + 3x(-4z)]$

$= (3x + 2y - 4z)^2$.

(ii) $25x^2 + 16y^2 + 4z^2 - 40xy + 16yz - 20xz$

$= (-5x)^2 + (4y)^2 + (2z)^2 + 2 \times -5x \times 4y + 2 \times 4y \times 2z - 2 \times 2z \times 5x$

$= (-5x + 4y + 2z)^2$.

(iii) $16x^2 + 4y^2 + 9z^2 - 16xy - 12yz + 24xz$

$= (4x)^2 + (-2y)^2 + (3z)^2 + 2 \times 4x \times -2y + 2 \times 3z \times -2y + 2 \times 3z \times 4x$

$= (4x - 2y + 3z)^2.$

8. $a + b + c = 0$ (दिया है) ...(i)

सूत्रानुसार,

$$a^3 + b^3 + c^3 - 3abc = (a + b + c)(a^2 + b^2 + c^2 - ab - bc - ca)$$

$\Rightarrow$ $a^3 + b^3 + c^3 - 3abc = 0$ [समीकरण (i) का प्रयोग करने पर]

$\Rightarrow$ $a^3 + b^3 + c^3 = 3abc$

दोनो पक्षों में abc से भाग देने पर,

$$\frac{a^3}{abc} + \frac{b^3}{abc} + \frac{c^3}{abc} = \frac{3abc}{abc}$$

अतः $\frac{a^2}{bc} + \frac{b^2}{ac} + \frac{c^2}{ab} = 3.$ इति सिद्धम्।

9. (i) सर्वसमिका $(x + a)(x + b) = x^2 + (a + b)x + ab$ के प्रयोग से,

$(x + 4)(x + 10) = x^2 + (4 + 10)x + 4 \times 10$

$= x^2 + 14x + 40.$ उत्तर

(ii) सर्वसमिका $(x + a)(x + b) = x^2 + (a + b)x + ab$ के प्रयोग से,

$(x + 8)(x - 10) = x^2 + (8 - 10)x + 8 \times (-10)$

$= x^2 - 2x - 80.$ उत्तर

(iii) $(3x + 4)(3x - 5) = 3x(3x - 5) + 4(3x - 5)$

$= 9x^2 - 15x + 12x - 20 = 9x^2 - 3x - 20.$ उत्तर

(iv) $\left(y^2 + \frac{3}{2}\right)\left(y^2 - \frac{3}{2}\right) = (y^2)^2 - \left(\frac{3}{2}\right)^2$

$= y^4 - \left(\frac{3}{2}\right)^2 = y^4 - \frac{9}{4}.$ उत्तर

(v) सर्वसमिका $(x + y)(x - y) = x^2 - y^2$ के प्रयोग से,

$(3 - 2x)(3 + 2x) = (3)^2 - (2x)^2 = 9 - 4x^2.$ उत्तर

10. (i) $103 \times 107 = (100 + 3)(100 + 7)$

$= 100 \times 100 + 100 \times 7 + 3 \times 100 + 3 \times 7$

$= 10000 + 700 + 300 + 21 = 11021.$ उत्तर

(ii) $95 \times 96 = (100 - 5)(100 - 4)$

$= (100)^2 + (-5 - 4)\, 100 + (-5) \times (-4)$

$= 10000 - 900 + 20 = 9120.$ उत्तर

(iii) $104 \times 96 = (100 + 4)(100 - 4)$

$= (100)^2 - (4)^2 = 10000 - 16 = 9984.$ उत्तर

11. (i) $x^3 + y^3 = (x + y)(x^2 - xy + y^2)$

R.H.S. $= (x + y)(x^2 - xy + y^2)$

$= (x^2 - xy + y^2) + y(x^2 - xy + y^3)$

$= x^3 - x^2y + xy^2\; x^2y - xy^2 - y^3$

$= x^3 + x^2y - x^2y + xy^2 - xy^2 - y^3$

$= x^3 + y^3.$

$=$ L. H. S.

(ii) $x^3 - y^3 = (x - y)(x^2 + xy + y^2)$

R.H.S. $= (x - y)(x^2 + xy + y^2)$

$= x(x^2 + xy + y^2) - y(x^2 + xy + y^2)$

$= x^3 + x^2y + xy^2 - yx^2 - xy^2 - y^3$

$= x^3 + x^2y - x^2y + xy^2 - xy^2 - y^3$

$= x^3 - y^3. =$ L.H.S.

12. **(i)** दिया है, $p(x) = 3x + 1$

$x = -\frac{1}{3}$ पर, $p\left(-\frac{1}{3}\right) = 3\left(-\frac{1}{3}\right) + 1 = -1 + 1 = 0$

अत: $x = -\frac{1}{3}$, $p(x)$ का शून्यक है। **उत्तर**

(ii) दिया है, $p(x) = 5x - \pi$

$x = \frac{4}{5}$ पर, $P\left(\frac{4}{5}\right) = 5\left(\frac{4}{5}\right) - \pi = 4 - \pi \neq 0$

अत: $x = \frac{4}{5}$, $p(x)$ का शून्यक नहीं है। **उत्तर**

(iii) दिया है, $p(x) = x^2 - 1$

$x = 1$ पर, $p(1) = (1)^2 - 1 = 1 - 1 = 0$

अत, $x = 1$, $p(x)$ का शून्यक है।

$x = -1$ पर $p(-1) = (-1)^2 - 1 = 1 - 1 = 0$

अत: $x = -1$, $p(x)$ का शून्यक है। **उत्तर**

(iv) दिया है, $p(x) = (x + 1)(x - 2)$

$x = -1$ पर, $P(-1) = (-1 + 1)(-1 - 2) = (0)(-3) = 0$

अत: $x = -1$, $p(x)$ एक शून्यक है। **उत्तर**

$x = 2$ पर, $p(2) = (2 + 1)(2 - 2) = (3)(0) = 0$

अत: $x = 2$, $p(x)$ का शून्यक है। **उत्तर**

(v) दिया है, $p(x) = x^2$

$x = 0$ पर, $p(0) = (0)^2 = 0$

अत: $x = 0$, $p(x)$ का शून्यक है। **उत्तर**

(vi) दिया है, $p(x) = lx + m$

$x = -\frac{m}{l}$ पर, $p\left(-\frac{m}{l}\right) = l\left(-\frac{m}{l}\right) + m = -m + m = 0$

अत: $x = -\frac{m}{l}$, $p(x)$ का शून्यक है। **उत्तर**

(vii) दिया है, $p(x) = 3x^2 - 1$

$x = -\frac{1}{\sqrt{3}}$ पर, $p\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}\right) = 3\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^2 - 1 = 3\left(\frac{1}{3}\right) - 1 = 1 - 1 = 0$

अतः $x = -\frac{1}{\sqrt{3}}$, $p(x)$ का शून्यक है। **उत्तर**

$x = \frac{2}{\sqrt{3}}$ पर, $p\left(\frac{2}{\sqrt{3}}\right) = 3\left(\frac{2}{\sqrt{3}}\right)^2 - 1 = 3\left(\frac{4}{3}\right) - 1 = 4 - 1 = 3$

अतः $x = \frac{2}{\sqrt{3}}$, $p(x)$ का शून्यक नहीं है। **उत्तर**

(viii) दिया है, $p(x) = 2x + 1$

$x = \frac{1}{2}$ पर, $p\left(\frac{1}{2}\right) = 2.\left(\frac{1}{2}\right) + 1 = 1 + 1 = 2$

अतः $x = \frac{1}{2}$, $p(x)$ का शून्यक नहीं है। **उत्तर**

13. (i) $p(x) = x + 5$

इस पद में $p(x)$ का शून्यक ज्ञात करना वैसा ही है जैसा कि समीकरण $p(x) = 0$ को हल करना।

अर्थात् $x + 5 = 0$ या $x = -5$

अतः -5, बहुपद $x + 5$ का शून्यक है।

(ii) $p(x) = x - 5$

इस पद में $p(x)$ का शून्यक ज्ञात करना वैसा ही है जैसा कि समीकरण $p(x) = 0$ को हल करना।

अर्थात् $x - 5 = 0$ या $x = 5$

अतः 5, बहुपद $x - 5$ का एक शून्यक है। **उत्तर**

(iii) $p(x) = 2x + 5$

इस पद में $p(x)$ का शून्यक ज्ञात करना वैसा ही है जैसा कि समीकरण $p(x) = 0$ को हल करना।

अर्थात् $2x + 5 = 0$ या $2x = -5 \Rightarrow x = -\frac{5}{2}$

अतः $-\frac{5}{2}$ इस बहुपद का एक शून्यक है। **उत्तर**

(iv) $p(x) = 3x - 2$

इस पद में $p(x)$ का शून्यक ज्ञात करना वैसा ही है जैसा कि समीकरण $p(x) = 0$ को हल करना।

अर्थात् $3x - 2 = 0$ या $3x = 2 \Rightarrow x = \frac{2}{3}$

अतः $\frac{2}{3}$ इस बहुपद का एक शून्यक है। **उत्तर**

(v) $p(x) = 3x$

इस पद में $p(x)$ का शून्यक ज्ञात करना वैसा ही है जैसा कि समीकरण $p(x) = 0$ को हल करना।

अर्थात् $3x = 0$ या $x = 0$

अतः $x = 0$ इस बहुपद का एक शून्यक है। **उत्तर**

(vi) $p(x) = ax;\ a \neq 0$

इस पद में $p(x)$ का शून्यक ज्ञात करना वैसा ही है जैसा कि समीकरण $p(x) = 0$ को हल करना।

अर्थात् $ax = 0$ या $x = 0$

अतः बहुपद ax का शून्यक 0 है। **उत्तर**

(vii) $\because$ $p(x) = cx + d;\ c \neq 0,\ c,\ d$ वास्तविक संख्याएँ हैं।

शून्यक के लिए

$$p(x) = 0$$

$\therefore$ $$cx + d = 0 \Rightarrow cx = -d \Rightarrow x = -\frac{d}{c}$$

अत: बहुपद $cx + d$ का शून्यक $-\frac{d}{c}$ है। **उत्तर**

14. **(i)** $$p(x) = 2x^3 + x^2 - 2x - 1$$
$$g(x) = x + 1 = 0 \Rightarrow x = -1$$

अत: $$p(-1) = 2(-1)^3 + (-1)^2 - 2(-1) - 1 = 0.$$

अत: $g(x), p(x)$ का एक गुणनखण्ड है।

(ii) $$p(x) = x^3 + 3x^2 + 3x + 1$$
$$g(x) = x + 2 = 0 \Rightarrow x = -2$$

अत: $$p(-2) = (-2)^3 + 3(-2)^2 + 3(-2) + 1 = -1 \neq 0.$$

अत: $g(x), p(x)$ का एक गुणनखण्ड नहीं है।

(iii) $$p(x) = x^3 - 4x^2 + x + 6$$
$$g(x) = x - 3 = 0 \Rightarrow x = 3$$

अत: $$p(3) = (3)^3 - 4(3)^2 + (3) + 6 = 27 - 36 + 3 + 6 = 0.$$

अत: $g(x), p(x)$ का गुणनखण्ड है।

15. **(i)** यदि $(x - 1), p(x)$ का एक गुणनखण्ड है।

तब $x = 1$ पर, $$p(1) = 0$$
$$2(1)^2 + k(1) + \sqrt{2} = 0$$
$$2 + k + \sqrt{2} = 0$$
$$k = -(2 + \sqrt{2}).$$ **उत्तर**

(ii) यदि $(x - 1), p(x) = kx^2 - \sqrt{2}x + 1$ का एक गुणनखण्ड है।

तब $x = 1$ पर $$p(1) = 0$$
$$k(1)^2 - \sqrt{2}(1) + 1 = 0$$

$\Rightarrow$ $$k - \sqrt{2} + 1 = 0$$

$\Rightarrow$ $$k = \sqrt{2} - 1.$$ **उत्तर**

(iii) यदि $(x - 1), p(x) = kx^2 - 3x + k$ का एक गुणनखण्ड है।

तब $x = 1$ पर, $$p(1) = 0$$
$$k(1)^2 - 3(1) + k = 0$$

$\Rightarrow$ $$k - 3 + k = 0$$

$\Rightarrow$ $$k = \frac{3}{2}.$$ **उत्तर**

16. $x^3 - 2x^2 - x + 2 = (x^3 - 2x^2) - (x - 2) = x^2(x - 2) - 1\ (x - 2)$
$= (x^2 - 1)\ (x - 2)$
$= (x - 1)\ (x + 1)\ (x - 2).$ **उत्तर**

17. माना कि $p(y) = 2y^3 + y^2 - 2y - 1$

दिए गए अचर पद 1 के समस्त गुणनखण्ड ± 1 हैं। निरीक्षण द्वारा बहुपद में $y = 1$ रखने पर

$$p(1) = 2(1)^3 + (1)^2 - 2(1) - 1$$
$$= 3 - 3 = 0$$

अर्थात् गुणनखण्ड प्रमेय के अनुसार $(y - 1)$ दिए गए बहुपद का एक गुणनखण्ड है।

अब $2y^3 + y^2 - 2y - 1 = 2y^3 - 2y^2 + 3y^2 - 3y + y - 1 = 2y^2 (y - 1) + 3y\ (y - 1) + 1\ (y - 1)$

अतः $2y^3 + y^2 - 2y - 1 = (y - 1)\ (2y^2 + 3y + 1)$

अबः $2y^2 + 3y + 1$ के गुणनखण्ड ज्ञात करने के लिए मध्यपद को विभाजित कर या गुणनखण्ड प्रमेय का प्रयोग कर सकते हैं।

अर्थात् $2y^3 + y^2 - 2y - 1 = (y - 1)\ (2y^2 + 3y + 1)$
$= (y - 1)\ [2y^2 + 2y + y + 1]$
$= (y - 1)\ [2y(y + 1) + 1\ (y + 1)]$
$= (y - 1)\ (y + 1)\ (2y + 1).$ **उत्तर**

18. माना कि $p(x) = x^3 - 2x^2 - x + 2$

दिए गए बहुपद के अचर पद 2 के समस्त गुणनखण्ड क्रमश ± 1 तथा ± 2 हैं। निरीक्षण द्वारा बहुपद में $x = -1$ रखने पर

$$p(-1) = (-1)^3 - 2(-1)^2 - (-1) + 2 = 0$$

अर्थात् गुणनखण्ड प्रमेय के अनुसार $(x + 1)$ दिए गए बहुपद का एक गुणनखण्ड है।

अतः $x^3 - 2x^2 - x + 2 = x^3 + x^2 - 3x^2 - 3x + 2x + 2 = x^2\ (x + 1) - 3x\ (x + 1) + 2(x + 1)$

अतः $x^3 - 2x^2 - x + 2 = (x + 1)\ (x^2 - 3x + 2)$

अब $x^2 - 3x + 2$ के गुणनखण्ड करने के लिए मध्य पद को विभाजित कर या गुणनखण्ड प्रमेय का प्रयोग कर सकते हैं :

अर्थात् $x^3 - 2x^2 - x + 2 = (x + 1)\ (x^2 - 3x + 2) = (x + 1)\ [x^2 - 2x - x + 2]$
$= (x + 1)\ [x(x - 2) - 1\ (x - 2)]$
$= (x + 1)\ (x - 1)\ (x - 2).$ **उत्तर**

19. $p(x) = x^3 - 3x^2 - 9x - 5$

माना $(x - 5)$, $p(x)$ का एक गुणनखण्ड हो, तब

$$p(5) = (5)^3 - 3(5)^2 - 9(5) - 5 = 0$$

अर्थात् $(x - 5)$, $p(x)$ का एक गुणनखण्ड हैं।

$\therefore$ $x^3 - 3x^2 - 9x - 5 = x^3 - 5x^2 + 2x^2 - 10x + x - 5$
$= x^2(x - 5) + 2x(x - 5) + 1\ (x - 5)$
$= (x - 5)\ (x^2 + 2x + 1)$
$= (x - 5)\ (x + 1)^2 = (x - 5)\ (x + 1)\ (x + 1).$ **उत्तर**

20. माना कि $p(x) = x^3 + 13x^2 + 32x + 20$

दिए गए बहुपद के अचर पद 20 के समस्त गुणनखण्ड क्रमशः $\pm 1, \pm 2, \pm 4, \pm 5, \pm 10$, तथा ± 20 हैं। निरीक्षण द्वारा बहुपद में $x = -1$ रखने पर

$$p(-1) = (-1)^3 + 13(-1)^2 + 32(-1) + 20$$
$$= 33 - 33 = 0$$

अर्थात् गुणनखण्ड प्रमेय के अनुसार $(x + 1)$ दिए गए बहुपद का एक गुणनखण्ड है।

अब $x^3 + 13x^2 + 32x + 20 = x^3 + x^2 + 12x^2 + 12x + 20x + 20$

$$= x^2(x + 1) + 12x(x + 1) + 20(x + 1)$$

अतः $x^3 + 13x^2 + 32x + 20 = (x + 1)(x^2 + 12x + 20)$

अब $x^2 + 12x + 20$ के गुणनखण्ड ज्ञात करने के लिए मध्य पद को विभाजित कर या गुणनखण्ड प्रमेय का प्रयोग कर सकते हैं।

अर्थात् $x^3 + 13x^2 + 32x + 20 = (x + 1)(x^2 + 12x + 20)$

$$= (x + 1)[x^2 + 10x + 2x + 20]$$
$$= (x + 1)[x(x + 10) + 2(x + 10)]$$
$$= (x + 1)(x + 2)(x + 10).$$ **उत्तर**

21. $x^3 - 6x^2 + 11x - 6$

व्यंजक के अचर पद 6 के गुणनखण्ड $= \pm 1, \pm 2, \pm 3$ हैं।

अब $x = 1$ रखने पर

$$(1)^3 - 6(1)^2 + 11(1) - 6 = 1 - 6 + 11 - 6 = 0$$

अतः $(x - 1)$ एक गुणनखण्ड होगा।

$x = 2$ रखने पर,

$$(2)^3 - 6(2)^2 + 11(2) - 6 = 8 - 24 + 22 - 6 = 0$$

अतः $(x - 2)$ दूसरा गुणनखण्ड होगा।

$x = 3$ रखने पर,

$$(3)^3 - 6(3)^2 + 11(3) - 6 = 27 - 54 + 33 - 6 = 0$$

अतः $(x - 3)$ तीसरा गुणनखण्ड होगा।

अतः $x^3 - 6x^2 + 11x - 6 = (x - 1)(x - 2)(x - 3).$ **उत्तर**