अध्याय
10

हीरोन का सूत्र
(Heron's Formula)

बहुविकल्पीय प्रश्न

1. सही विकल्प (A)

मान लीजिए समद्विबाहु समकोण त्रिभुज की बराबर भुजाओं में से प्रत्येक x सेमी की है, अर्थात् $AB = BC = x$ सेमी।

समद्विबाहु त्रिभुज का क्षेत्रफल $= \frac{1}{2} \times$ आधार $\times$ ऊँचाई

$$\frac{1}{2} \times (AB \times BC) = 8$$

$$\frac{1}{2} \times (x \times x) = 8$$

$$x = \sqrt{16} = 4 \text{ सेमी}$$

अत: $AB = BC = 4$ सेमी

पाइथागोरस प्रमेय से,

$$(AB)^2 + (BC)^2 = (AC)^2$$

$$(AC)^2 = (4)^2 + (4)^2$$

$$AC = \sqrt{32} \text{ सेमी.}$$

2. सही विकल्प (D)

समबाहु त्रिभुज का परिमाप $= 60$ मी

माना समबाहु त्रिभुज की प्रत्येक भुजा a हो, तब

$$3a = 60 \text{ मी}$$

$\Rightarrow$ $a = 20$ मी

इसका क्षेत्रफल $= \frac{\sqrt{3}}{4} a^2 = \frac{\sqrt{3}}{4} \times 20 \times 20 = 100\sqrt{3}$ मी^{2}

3. सही विकल्प (C)

अर्द्ध परिमाप $s = \frac{56 + 60 + 52}{2} = \frac{168}{2} = 84$ सेमी

क्षेत्रफल $= \sqrt{84(84-56)(84-60)(84-52)}$

$= \sqrt{84 \times 28 \times 24 \times 32} = 1344$ सेमी^{2}

4. सही विकल्प (A)

$$\text{समबाहु त्रिभुज का क्षेत्रफल} = \frac{\sqrt{3}}{4} \times (2\sqrt{3})^2 = \frac{\sqrt{3}}{4} \times 4 \times 3$$

$$= 3\sqrt{3} = 3 \times 1.732 = 5.196 \text{ सेमी}^2$$

5. सही विकल्प (D)

माना समबाहु त्रिभुज की प्रत्येक भुजा a हो, तब समबाहु त्रिभुज का क्षेत्रफल $= 9\sqrt{3}$ सेमी^{2}

$$\frac{\sqrt{3}}{4}a^2 = 9\sqrt{3}$$

$$a^2 = \frac{9\sqrt{3} \times 4}{\sqrt{3}} = 36$$

$$a = \sqrt{36} = 6 \text{ सेमी}$$

6. सही विकल्प (B)

माना समबाहु त्रिभुज की प्रत्येक भुजा a सेमी हो, तब समबाहु त्रिभुज का क्षेत्रफल $= 16\sqrt{3}$ **सेमी** ^{2}

अर्थात् $$\frac{\sqrt{3}}{4}(a)^2 = 16\sqrt{3}$$

$\Rightarrow$ $$a^2 = \frac{16\sqrt{3} \times 4}{\sqrt{3}} = 64$$

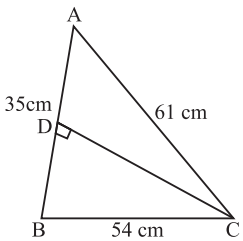
$$a = \sqrt{64} = 8 \text{ सेमी}$$

अतः त्रिभुज की परिमाप $= 3 \times a = 3 \times 8 = 24$ सेमी।

7. सही विकल्प (C)

माना ABC एक त्रिभुज है जिसमें $CD \perp AB$ है और $CD = h$ सेमी है, तब ΔABC का अर्द्ध परिमाप

$$s = \frac{35 + 54 + 61}{2} = \frac{150}{2} = 75 \text{ सेमी}$$



$$\text{क्षेत्रफल} = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$$

$$= \sqrt{75(75-30)(75-54)(75-61)}$$

$$= \sqrt{75 \times 40 \times 21 \times 14} = 420\sqrt{5} \text{ सेमी}^2$$

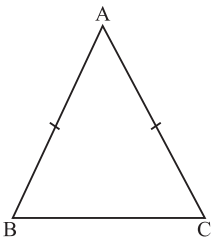
$$\text{क्षेत्रफल} = 420\sqrt{5}$$

$$\frac{1}{2} \times 35 \times h = 420\sqrt{5}$$

$$h = 24\sqrt{5} \text{ सेमी।}$$

8. सही विकल्प (A)

माना ABC एक समद्विबाहु त्रिभुज है, जिसकी भुजाएँ a, b तथा c हों, तब



$$a = 4 \text{ सेमी}, b = 4 \text{ सेमी}, c = 2 \text{ सेमी}$$

$$s = \frac{a+b+c}{2} = \frac{4+4+2}{2} = 5$$

$$\text{क्षेत्रफल} = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$$

$$= \sqrt{5(5-4)(5-4)(5-2)}$$

$$= \sqrt{5\times1\times1\times3} = \sqrt{15} \text{ सेमी}^2$$

9. सही विकल्प (B)

माना $a = 6$ सेमी, $b = 8$ सेमी, $c = 10$ सेमी हों, तब

$$s = \frac{a+b+c}{2} = \frac{6+8+10}{2} = \frac{24}{2} = 12 \text{ सेमी}$$

$$\text{क्षेत्रफल} = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$$

$$= \sqrt{12(12-6)(12-8)(12-10)}$$

$$= \sqrt{12\times6\times4\times2} = 24 \text{ **सेमी**}^2$$

अतः $\text{व्यय} = ₹\ 0.09 \times 24 = ₹\ 2.16.$

10. माना प्रत्येक भुजा की लम्बाई $13x$ मी, $12x$ मी तथा $5x$ मी होगी।

इससे बनने वाली आकृति का परिमाप = 450 मी

अर्थात् $13x + 12x + 5x = 450$

$\Rightarrow$ $30x = 450$

$\Rightarrow$ $x = 15$

अब सबसे छोटी भुजा $= 5x = 5 \times 15 = 75$ मी।

अतः विकल्प (A) सही है। **उत्तर**

11. माना त्रिभुज की भुजाएँ क्रमशः होंगी: $a = 5$ सेमी, $b = 12$ सेमी तथा $c = 13$ सेमी

$$\therefore \quad s = \frac{a+b+c}{2} = \frac{5+12+13}{2} = \frac{30}{2} = 15 \text{ सेमी}$$

अब त्रिभुज का क्षेत्रफल $= \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$

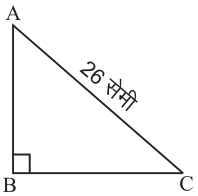
$$= \sqrt{15(15-5)(15-12)(15-13)}$$

$$= \sqrt{15\times10\times3\times2} = 30 \text{ सेमी}^2$$

अतः विकल्प (A) सही है। **उत्तर**

12. माना एक समकोण त्रिभुज ABC है।

जहाँ B समकोण है।



$\therefore$ समकोण त्रिभुज ABC का परिमाप $= 60$ सेमी

अर्थात् $AB + BC + CA = 60$

$\Rightarrow$ $AB + BC + 26 = 60$ [$\because$ कर्ण $CA = 26$ सेमी (दिया है)]

$\Rightarrow$ $AB + BC = 60 - 26 = 34$ सेमी

अतः विकल्प (B) सही है। **उत्तर**

13. समकोण ΔABC से,

$$AB^2 + BC^2 = AC^2 \quad \text{(पाइथागोरस प्रमेय से)}$$

$\Rightarrow$ $AB^2 + BC^2 = (26)^2$

$\Rightarrow$ $AB^2 + BC^2 = 676$

$\because$ प्रश्न 3 से $AB + BC = 34$ (ज्ञात कर लिया है)

दोनों पक्षों का वर्ग करने पर,

$$AB^2 + BC^2 + 2AB.BC = 1156$$

$\Rightarrow$ $676 + 2AB.BC = 1156$ [समी. (i) से]

$\Rightarrow$ $2AB.BC = 1156 - 676 = 480$

$\Rightarrow$ $AB.BC = 240$

अतः विकल्प (A) सही है। **उत्तर**

14. खेल के मैदान अर्थात्

$$\Delta ABC \text{ का क्षेत्रफल} = \frac{1}{2} \times AB.BC$$

$$= \frac{1}{2} \times 240 = 120 \text{ वर्ग सेमी} \quad \text{[प्रश्न 4 से]}$$

अतः विकल्प (D) सही है। **उत्तर**

15. प्रश्न 3 से, $AB + BC = 34$

प्रश्न 4 से, $AB = \frac{240}{BC}$

तब, $\frac{240}{BC} + BC = 34$

$\Rightarrow \quad 240 + BC^2 = 34\,BC$

अर्थात् $BC^2 - 34BC + 240 = 0$

$\Rightarrow \quad BC^2 - (24 + 10)BC + 240 = 0$

$\Rightarrow \quad BC^2 - 24\,BC - 10BC + 240 = 0$

$\Rightarrow \quad BC(BC - 24) - 10(BC - 24) = 0$

$\Rightarrow \quad (BC - 24)\,(BC - 10) = 0$

अर्थात् $BC = 24, 10$

जब $BC = 24$ सेमी हो, तब $AB = 10$ सेमी,

इसलिए समकोण बनाने वाली भुजाएँ क्रमशः 24 सेमी तथा 10 सेमी होंगी।

अतः विकल्प (C) सही है। **उत्तर**

16. खेल के मैदान की प्रत्येक भुजा क्रमशः है :

AB = 10 सेमी, BC = 24 सेमी, CA = 26 सेमी

प्रश्नानुसार, $AB = 9$ सेमी, $BC = 23$ सेमी $CA = 25$ सेमी

तब अर्द्धपरिमाप, $s = \frac{AB + BC + CA}{2}$

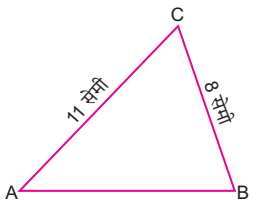
$= \frac{9 + 23 + 25}{2} = \frac{57}{2} = 28.5$ सेमी

अतः विकल्प (A) सही है। **उत्तर**

वर्णनात्मक प्रश्न

लघु उत्तरीय प्रश्न :

1. माना त्रिभुज की भुजाएँ a, b और c हों, तब परिमाप, $a + b + c = 32$ सेमी, $a = 8$ सेमी और $b = 11$ सेमी है।



इसलिए, तीसरी भुजा $c = 32$ सेमी $- (8 + 11)$ सेमी $= 13$ सेमी

जब $2s = 32$ सेमी हो, तब

$\because \quad s = 16$ सेमी

अब $s - a = (16 - 8)$ सेमी $= 8$ सेमी

$s - b = (16 - 11)$ सेमी $= 5$ सेमी

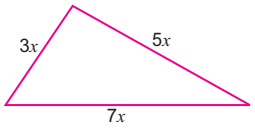
$s - c = (16 - 13)$ सेमी $= 3$ सेमी

अतः त्रिभुज का क्षेत्रफल $= \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$

$= \sqrt{16 \times 8 \times 5 \times 3}$ वर्ग सेमी

$= 8\sqrt{30}$ वर्ग सेमी **उत्तर**

2. मान लीजिए भुजाएँ $3x$, $5x$ और $7x$ हों, तब



त्रिभुज का परिमाप, $3x + 5x + 7x = 300$

$\therefore$ $15x = 300$ अर्थात् $x = 20$.

अब त्रिभुज की भुजाएँ 3×20 मीटर, 5×20 मीटर और 7×20 मीटर हैं।

अर्थात् ये भुजाएँ 60 मीटर, 100 मीटर और 140 मीटर हैं।

अब अर्द्ध-परिमाप, $s = \frac{60+100+140}{2}$ मीटर $= 150$ मीटर

अतः क्षेत्रफल $= \sqrt{150(150-60)(150-100)(150-140)}$

$= \sqrt{150 \times 90 \times 50 \times 10}$

$= 1500\sqrt{3}$ वर्ग मीटर। **उत्तर**

3. माना समबाहु Δ की प्रत्येक भुजा $= a$

अर्द्ध परिमाप $s = \frac{a+a+a}{2} = \frac{3a}{2}$

त्रिभुज का क्षेत्रफल $= \sqrt{\left(\frac{3a}{2}\right)\left(\frac{3a}{2}-a\right)\left(\frac{3a}{2}-a\right)\left(\frac{3a}{2}-a\right)}$

$= \sqrt{\frac{3a}{2} \times \frac{a}{2} \times \frac{a}{2} \times \frac{a}{2}}$

$= \frac{\sqrt{3}}{4}a^2$ वर्ग इकाई

त्रिभुज का क्षेत्रफल ज्ञात करना, जब उसका परिमाप $= 180$ सेमी

$\Rightarrow$ $a + a + a = 180$ सेमी

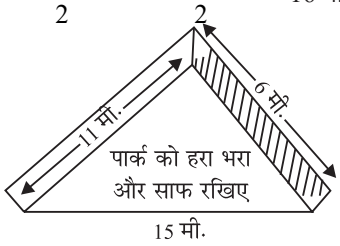
$\Rightarrow$ $a = \frac{180}{3}$ सेमी $= 60$ सेमी

अभीष्ट क्षेत्रफल $= \frac{\sqrt{3}}{4}a^2 = \frac{\sqrt{3}}{4} \times 60^2$ सेमी$^2 = \frac{\sqrt{3}}{4} \times 60 \times 60$ सेमी^{2}

$= 900\sqrt{3}$ सेमी^{2}। **उत्तर**

4. माना भुजाएँ $a = 15$ मीटर, $b = 11$ मीटर, $c = 6$ मीटर हों, तब

$$s = \frac{a+b+c}{2} = \frac{15+11+6}{2} = 16 \text{ मीटर}$$



हीरोन सूत्र का प्रयोग करने पर अभीष्ट क्षेत्रफल $= \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$

$= \sqrt{16(16-15)(6-11)(16-6)}$ मीटर^2

$= \sqrt{16\times1\times5\times10}$ मीटर^2

$= 4 \times 5 \times \sqrt{2}$ मीटर$^2 = 20\sqrt{2}$ मीटर^2 **उत्तर**

5. माना a, b और c एक त्रिभुज की भुजाएँ हों, तब

$a = 18$ सेमी, $b = 10$ सेमी और $a + b + c = 42$ सेमी

$\therefore$ $c = 42 - a - b$

$\Rightarrow$ $c = (42 - 18 - 10)$ सेमी $= 14$ सेमी

अब $s = \frac{1}{2}(a + b + c) = \frac{1}{2} \times 42$ सेमी $= 21$ सेमी

$s - a = (21 - 18)$ सेमी $= 3$ सेमी, $s - b = (21 - 10)$ सेमी $= 11$ सेमी और $s - c = (21 - 14)$ सेमी $= 7$ सेमी

त्रिभुज का क्षेत्रफल $= \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$

$= \sqrt{21\times3\times11\times7}$ सेमी^{2}

$= \sqrt{3\times7\times3\times11\times7}$ सेमी^{2}

$= \sqrt{3\times3\times7\times7\times11}$ सेमी$^2 = 21\sqrt{11}$ सेमी^{2}।

6. त्रिभुज का परिमाप $= 540$ सेमी

माना त्रिभुज की भुजाएँ $a = 12x$, $b = 17x$, $c = 25x$

अब $a + b + c = 540$

$12x + 17x + 25x = 540$

$54x = 540 \Rightarrow x = 10$

$a = 12x = 12 \times 10 = 120$ सेमी

$b = 17x = 17 \times 10 = 170$ सेमी

$c = 25x = 25 \times 10 = 250$ सेमी

$s = \frac{a+b+c}{2} = \frac{540}{2} = 270$ सेमी

∴ त्रिभुज का क्षेत्रफल $= \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$

$= \sqrt{270(270-120)(270-170)(270-250)}$ सेमी^{2}

$= \sqrt{270\times150\times100\times20}$ सेमी^{2}

$= \sqrt{9\times3\times10\times5\times3\times10\times10\times10\times10\times2}$ सेमी^{2}

$= \sqrt{9\times9\times10\times10\times10\times10\times10\times10}$ सेमी^{2}

$= 9 \times 10 \times 10 \times 10$ सेमी$^2 = 9000$ सेमी^{2}।

7. प्रश्नानुसार त्रिभुज का परिमाप = 30 सेमी

अर्थात् 12 सेमी + 12 सेमी + x = 30 सेमी

या 24 सेमी + x = 30 सेमी

या x = 30 सेमी – 24 सेमी या x = 6 सेमी.

∴ त्रिभुज का अर्द्ध–परिमाप $(s) = \frac{12+12+6}{2} = \frac{30}{2} = 15$ सेमी.

हीरोन के सूत्रानुसार Δ का क्षेत्रफल $= \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$

$= \sqrt{15(15-12)(15-12)(15-6)}$

$= \sqrt{15\times3\times3\times9}$ सेमी^{2}

$= \sqrt{15\times3\times3\times3\boxtimes3}$

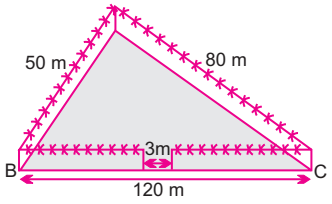
$= 3 \times 3\ \sqrt{15}$ सेमी$^2 = 9\sqrt{15}$ सेमी। **उत्तर**

दीर्घ उत्तरीय प्रश्न :

1. माना त्रिभुजाकार पार्क की भुजाएँ क्रमशः a, b तथा c हों तब a = 120 मी, b = 80 मी तथा c = 50 मीटर इसलिए त्रिभुजाकार पार्क का परिमाप, $2s = a + b + c$

$2s$ = 50 मीटर + 80 मीटर + 120 मीटर = 250 मीटर

अर्थात् s = 125 मीटर



अब $s - a$ = (125 – 120) मीटर = 5 मीटर

$s - b$ = (125 – 80) मीटर = 45 मीटर

$s - c$ = (125 – 50) मीटर = 75 मीटर

अतः घास उगाने के लिए क्षेत्रफल $= \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$

$= \sqrt{125\times5\times45\times75}$ वर्ग मीटर

$= 375\sqrt{15}$ वर्ग मीटर

$\because$ पार्क का परिमाप $= 250$ मी (ज्ञात है)

अतः बाड़ लगाने के लिए आवश्यक तार की लम्बाई

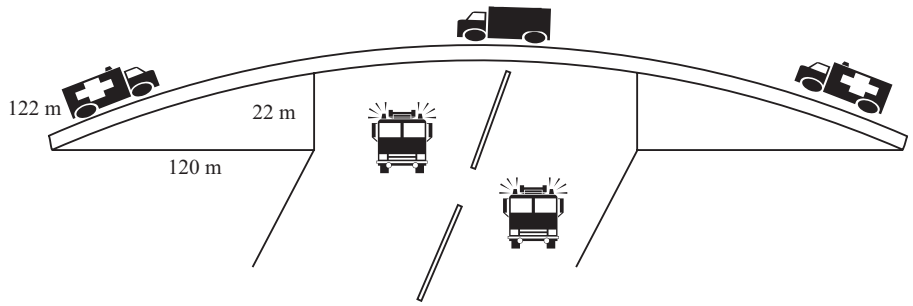
$= 250$ मीटर $- 3$ मीटर (फाटक के लिए)

$= 247$ मीटर

अतः बाड़ लगाने का व्यय $= 20 \times 247 = ₹\ 4940.$ **उत्तर**

2. माना भुजाएँ $a = 122$ मीटर, $b = 22$ मीटर, $c = 120$ मीटर हों, तब

$$s = \frac{a+b+c}{2} = \frac{122+22+120}{2} \text{ मीटर} = 132 \text{ मीटर}$$



त्रिभुजाकार दीवार का क्षेत्रफल $= \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$,

$= \sqrt{132(132-122)(132-22)(132-120)}$ मीटर^2

$= \sqrt{132\times10\times110\times12}$ मीटर$^2 = 1320$ मीटर^2

किराये की दर $= ₹\ 5000$ प्रति वर्ग मीटर प्रति वर्ष

3 महीने का कुल किराया $= ₹\left(5000\times1320\times\frac{3}{12}\right) = ₹\ 16{,}50{,}000.$ **उत्तर**