अध्याय 1

संख्या पद्धति
(Number System)

बहुविकल्पीय प्रश्न

1. सही विकल्प : (C)

स्पष्टीकरण : $2\sqrt{3}+\sqrt{3} = 3\sqrt{3}$.

2. सही विकल्प : (B)

स्पष्टीकरण : $\sqrt{10}\times\sqrt{15} = \sqrt{10\times15} = 5\sqrt{6}$.

3. सही विकल्प : (A)

स्पष्टीकरण : $\frac{1}{\sqrt{7}-2} = \frac{1}{\sqrt{7}-2}\times\frac{\sqrt{7}+2}{\sqrt{7}+2} = \frac{\sqrt{7}+2}{7-4} = \frac{\sqrt{7}+2}{3}$.

4. सही विकल्प : (D)

स्पष्टीकरण : $\frac{1}{\sqrt{9}-\sqrt{8}} = \frac{1}{3-\sqrt{8}} = \frac{1}{3-\sqrt{8}}\times\frac{3+\sqrt{8}}{3+\sqrt{8}} = \frac{3+\sqrt{8}}{9-8}$

$= 3+\sqrt{2\times4} = 3+2\sqrt{2}$.

5. सही विकल्प : (B)

स्पष्टीकरण : $\frac{7}{3\sqrt{3}-2\sqrt{2}} = \frac{7}{3\sqrt{3}-2\sqrt{2}}\times\frac{(3\sqrt{3}+2\sqrt{2})}{3\sqrt{3}+2\sqrt{2}}$

$= \frac{7(3\sqrt{3}+2\sqrt{2})}{27-8} = \frac{7(3\sqrt{3}+2\sqrt{2})}{19}$

6. सही विकल्प : (B)

स्पष्टीकरण : $\frac{\sqrt{32}+\sqrt{48}}{\sqrt{8}+\sqrt{12}} = \frac{4\sqrt{2}+4\sqrt{3}}{2\sqrt{2}+2\sqrt{3}} = \frac{4(\sqrt{2}+\sqrt{3})}{2(\sqrt{2}+\sqrt{3})} = \frac{4}{2} = 2.$

7. सही विकल्प : (C)

स्पष्टीकरण : $\sqrt{\frac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}+1}\times\frac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}-1}} = \sqrt{\frac{(\sqrt{2}-1)^2}{(\sqrt{2})^2-(1)^2}} = \frac{\sqrt{2}-1}{1}$

अतः परिमेयकरण के बाद प्राप्त संख्या $\sqrt{2}-1 = 1.4142 - 1 = 0.4142$.

8. सही विकल्प : (C)

स्पष्टीकरण : $\sqrt[4]{\sqrt[3]{2^2}} = \sqrt[4]{(2^2)^{1/3}} = \left(2^{\frac{2}{3}}\right)^{\frac{1}{4}} = 2^{\frac{2}{3}\times\frac{1}{4}} = 2^{\frac{1}{6}}.$

9. सही विकल्प : (B)

स्पष्टीकरण : हमें ज्ञात है :

$$\sqrt[3]{2}.\sqrt[4]{2}\,\sqrt[12]{32} = 2^{\frac{1}{3}}.2^{\frac{1}{4}}.2^{\frac{5}{12}} = 2^{\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\frac{5}{12}} = 2^{\frac{12}{12}} = 2.$$

10. सही विकल्प : (A)

स्पष्टीकरण : $\sqrt[4]{81^{-2}} = \sqrt[4]{\frac{1}{81^2}} = \left[\left(\frac{1}{9}\right)^2\right]^{2\times\frac{1}{4}} = \frac{1}{9}^{4\times\frac{1}{4}} = \frac{1}{9}.$

11. सही विकल्प : (A)

स्पष्टीकरण : $256^{0.16} \times 256^{0.09} = 256^{0.16+0.09} = 256^{0.25}$

$$= 256^{\frac{1}{4}} = (4^4)^{\frac{1}{4}} = 4^{4\times\frac{1}{4}} = 4.$$

12. सही विकल्प : (C)

स्पष्टीकरण :

(A) $x^{\frac{12}{7}} \times x^{\frac{5}{7}} \neq x$

(B) $\sqrt[12]{x^{\frac{4}{3}}} = x^{\frac{4}{3}\times\frac{1}{12}} = x^{\frac{1}{9}} \neq x$

(C) $\left(\sqrt{x^3}\right)^{\frac{2}{3}} = \left(x^{3\times\frac{1}{2}}\right)^{\frac{2}{3}} = x^{\frac{3}{2}\times\frac{2}{3}} = x.$

(D) $x^{\frac{12}{7}} \times x^{\frac{7}{12}} = x^{\frac{12}{7}+\frac{7}{12}} = x^{\frac{193}{84}} \neq x.$

13. सही विकल्प (D)

एक संख्या अपरिमेय तभी और तभी होती है जब इसका दशमलव प्रसार असांत/अनावर्ती हो।

(A) 1.14 एक सांत दशमलव है और इसलिए यह एक अपरिमेय संख्या नहीं हो सकती।

(B) $0.14\overline{16}$ एक असांत/आवर्ती संख्या है अतः यह अपरिमेय संख्या नहीं हो सकती।

(C) $0.\overline{1416}$ एक असांत/आवर्ती संख्या है अतः यह अपरिमेय संख्या नहीं हो सकती।

(D) 0.4014001400014....... यह असांत/अनावर्ती संख्या है अतः यह एक अपरिमेय संख्या है।

14. सही विकल्प (C)

चूँकि, $\sqrt{2}$ = 1.4142135 ... और $\sqrt{3}$ = 1.732050807... यहाँ 1.5 एक परिमेय संख्या है जो 1.4142135 .... और 1.732050807 ..... के बीच है।

15. सही विकल्प (C)

माना $x = 1.999999... = 1.\overline{9}$ ...(1)

तब, $10x = 19.9999 = 19.\overline{9}$ ...(2)

समीकरण (2) में से (1) को घटाने पर

$$9x = 18$$

$\Rightarrow$ $x = 2$

$\therefore$ $\frac{p}{q}$ के रूप में 1.999..... का मान 2 या $\frac{2}{1}$ है।

16. $\frac{5}{4}$ तथा $\frac{3}{2}$ के बीच की संख्या $= \frac{1}{2}\left[\frac{5}{4}+\frac{3}{2}\right] = \frac{1}{2}\left[\frac{5+6}{4}\right] = \frac{11}{8}$

अत: विकल्प (A) सही है।

17. $(256)^{0.17} \times (256)^{0.08} = (256)^{0.17 + 0.08}$

$$= (256)^{0.25} = [256]^{25/100}$$

$$= [256]^{1/4} = 4^{4\times 1/4} = 4.$$

अत: विकल्प (A) सही है। **उत्तर**

वर्णनात्मक प्रश्न

अति लघु उत्तरीय प्रश्न :

1. यहाँ $3.142678 = \frac{3142678}{1000000}$ है। अतः यह एक परिमेय संख्या है।

2. $\sqrt{23}$ अभाज्य संख्या होने के कारण अपरिमेय है क्योंकि अभाज्य संख्या एक पूर्ण की संख्या नहीं होती है।

3. $\sqrt{225} = \sqrt{3\times3\times5\times5} = 3 \times 5 = 15$ एक परिमेय संख्या है।

4. 0.3796 एक सांत दशमलव संख्या है अत: 0.3796 एक परिमेय संख्या है।

5. **(i)** $2 - \sqrt{5}$

दी गई संख्या में 2 एक परिमेय संख्या है जिसमें से $\sqrt{5}$ अपरिमेय संख्या को घटाने है। घटाने पर निश्चित ही एक अपरिमेय संख्या प्राप्त होगी अर्थात्

$$2 - \sqrt{5} = \text{अपरिमेय संख्या।}$$

(ii) $(3+\sqrt{23})-\sqrt{23} = 3 + \sqrt{23} - \sqrt{23} = 3 =$ एक परिमेय संख्या।

6. **(i)** $\frac{2\sqrt{7}}{7\sqrt{7}} = \frac{2}{7}$ एक परिमेय संख्या।

(ii) $\frac{1}{\sqrt{2}}$ = अपरिमेय संख्या। ($\because$ एक परिमेय तथा अपरिमेय का भागफल अपरिमेय होता है।)

(iii) 2π, यहाँ संख्या 2 परिमेय और π अपरिमेय संख्या का गुणनफल अपरिमेय आता है। अत: 2π एक अपरिमेय संख्या है। **उत्तर**

7. **(i)** $\frac{8\sqrt{15}}{2\sqrt{3}} = \frac{2\times4\sqrt{3}\times\sqrt{5}}{2\sqrt{3}} = \mathbf{4\sqrt{5}}$. **उत्तर**

(ii) $(2\sqrt{2}+5\sqrt{3})+(\sqrt{2}-3\sqrt{3}) = (2\sqrt{2}+\sqrt{2})+(5\sqrt{3}-3\sqrt{3})$

$= (2+1)\sqrt{2}+(5-3)\sqrt{3} = 3\sqrt{2}+2\sqrt{3}$.

8. $6\sqrt{5}\times 2\sqrt{5} = 6\times 2\times\sqrt{5}\times\sqrt{5}$

$= 12 \times 5 = 60.$

9. यहाँ हम $\sqrt{3}-\sqrt{5}$ का परिमेयकरण करेंगे।

$$\therefore \quad \frac{5}{\sqrt{3}-\sqrt{5}} = \frac{5}{\sqrt{3}-\sqrt{5}}\times\frac{\sqrt{3}+\sqrt{5}}{\sqrt{3}+\sqrt{5}} = \frac{5(\sqrt{3}+\sqrt{5})}{3-5} = \left(\frac{-5}{2}\right)(\sqrt{3}+\sqrt{5}).$$

10. $$\frac{1}{7+3\sqrt{2}} = \frac{1}{7+3\sqrt{2}}\times\left(\frac{7-3\sqrt{2}}{7-3\sqrt{2}}\right) = \frac{7-3\sqrt{2}}{49-18} = \frac{7-3\sqrt{2}}{31}.$$

लघु उत्तरीय प्रश्न : (प्रत्येक 4 अंक)

1. मान लीजिए

$x = 0.333\ldots$ ...(1)

10 का दोनों पक्षों में गुणा करने पर,

तब $10x = 10 \times (0.333\ldots) = 3.333\ldots$ ...(2)

समीकरण (2) में से (1) को घटाने पर,

$9x = 3$

$x = \frac{3}{9}$

अर्थात् $x = \frac{1}{3}$. **उत्तर**

2. मान लीजिए $x = 1.272727....$ ...(1)

$\because$ यहाँ दो अंकों की पुनरावृत्ति है। इसलिए दोनों पक्षों में 100 से गुणा करने पर,

$100x = 127.2727\ldots$ ...(2)

समीकरण (2) में से (1) को घटाने पर,

$100x - x = 126$ अर्थात् $99x = 126$

अर्थात् $x = \frac{126}{99} = \frac{14}{11}$. **उत्तर**

3. मान लीजिए $x = 0.2\overline{35} = 0{\cdot}2353535...$

यहाँ यह देखिए कि 2 की पुनरावृत्ति नहीं होती है, परन्तु खंड 35 की पुनरावृत्ति होती है। क्योंकि दो अंकों की पुनरावृत्ति हो रही है, इसलिए सर्वप्रथम हम 10 से दोनों पक्षों में गुणा करते हैं,

$10x = 2{\cdot}353535\ldots$ ...(2)

पुनः हम दोनों पक्षों में 100 से गुणा करने पर,

$1000x = 235{\cdot}353535....$ ...(3)

समीकरण (3) में से (2) को घटाने पर,

$$990x = 233$$

$$x = \frac{233}{990}.$$

4. हाँ, प्रश्न में दी गई सभी संख्याओं क्रमशः $\frac{1}{7}, \frac{2}{7}, \frac{3}{7}, \frac{4}{7}, \frac{5}{7}, \frac{6}{7}$ का दशमलव प्रसार आवर्ती दशमलव है जोकि 1, 4, 2, 8, 5, 7 का ही प्रसार है।

$\frac{2}{7}$ का मान ज्ञात करने के लिए यह जानना आवश्यक होगा कि शेषफल 2 कब आता है तथा उससे सम्बन्धित भागफल जोकि इस प्रश्न में 2 है, तब वहाँ से प्रारम्भ होने वाला नया भागफल लिखना होगा, अर्थात्

$$\frac{2}{7} = 0.\overline{285714}$$

इसी प्रकार $\frac{3}{7} = 0.\overline{428571}$

$$\frac{4}{7} = 0.\overline{571428}$$

$$\frac{5}{7} = 0.\overline{714285}$$

$$\frac{6}{7} = 0.\overline{857142}$$

उत्तर

5. मान लीजिए $x = 0.\overline{6} = 0.6666$ ...(i)

दोनों पक्षों में 10 का गुणा करने पर $10x = 6.666...$

$$= 6 + 0.6666$$

$$= 6 + 0.666$$

$$10x = 6 + x$$

या $9x = 6$

या $x = \frac{6}{9} = \frac{2}{3}$

$\therefore$ $0.\overline{6} = \frac{2}{3}.$ उत्तर

6. मान लीजिए $x = 0.4\overline{7}$

दोनों पक्षों में 10 का गुणा करने पर $10x = 10 \times 0.4\overline{7} = 4.\overline{7}$

या $10x = 4 + 0.\overline{7} = 4 + \frac{7}{9} = \frac{43}{9}$

या $x = \frac{43}{90}$

$\therefore$ $0.4\overline{7} = \frac{43}{90}.$ उत्तर

7. मान लीजिए $x = 0.\overline{001}$ ...(i)

यहाँ दशमलव बिन्दु के बाद तीन आवर्ती अंक हैं, अतः समी. (i) में $(10)^3 = 1000$ से गुणा करने पर

$$1000x = 1.001001 \qquad ...(ii)$$

समी. (ii) में से समी. (i) को घटाने पर,

$$1000x - x = (1.001001...) - (0.0010001...)$$

$$999\,x = 1$$

$$x = \frac{1}{999}$$

$\Rightarrow$ $$0.\overline{001} = \frac{1}{999}.$$ **उत्तर**

8. मान लीजिए $x = 0.9999...$ ...(i)

$\because$ यहाँ केवल एक आवर्ती अंक है। अतः दोनों पक्षों में 10 का गुणा करने पर

$$10x = 0.9999... = 9 + 0.9999... \qquad ....(ii)$$

$$10x = 9 + x \quad \text{या} \quad 9x = 9$$

या $$x = 1$$

$$0.9999... = 1.$$ **उत्तर**

9. $$\frac{1}{17} = 0.\overline{0588235294117647}$$

$\therefore$ $\frac{1}{17}$ में भागफल में अंकों की अधिकतम संख्या 16 है। **उत्तर**

10. $\frac{p}{q}$ $(q \neq 0)$ के रूप में परिमेय संख्यायें क्रमशः $\frac{1}{2}, \frac{7}{8}, \frac{639}{250}, \frac{7}{16}, \frac{11}{25}$, ...आदि हो सकती हैं जिनका सांत दशमलव निरूपण होता है। सांत दशमलव की परिभाषा के अनुसार जब किसी परिमेय संख्या का हर 2 या 5 या दानों की घात में हो, तो ऐसी परिमेय संख्याओं में सांत दशमलव प्राप्त होता है। दूसरे शब्दों में, यह भी कहा जा सकता है कि परिमेय संख्या $\frac{p}{q}$ $(q \neq 0)$ को सांत दशमलव के रूप में निरूपित करने के लिए आवश्यक है कि प्रत्येक q ऐसा लिया जाये कि q के अभाज्य गुणनखण्ड में केवल 2 की घात या 5 की घात या दानों ही हों। **उत्तर**

11. हम जानते हैं कि सभी अपरिमेय संख्याओं का दशमलव प्रसार अनवसानी आवर्ती होता है।

अतः $\sqrt{2}, \sqrt{3}, \sqrt{5}$, ... इत्यादि का दशमलव प्रसार अनवसानी आवर्ती है।

ऐसी संख्या को सीधे दशमलव प्रसार के रूप में भी लिख सकते हैं :

$a = 0.04004000400004...$, $b = 0.505005000500005...$ तथा $c = 0.007000700007...$

उत्तर

12. $$2 \text{ और } 3 \text{ के बीच परिमेय संख्या} = \frac{1}{2}[2+3] = \frac{5}{2}$$

$$2 < \frac{5}{2} < 3$$

पुनः 2 और $\frac{5}{2}$ के बीच परिमेय संख्या $= \frac{1}{2}\left[2+\frac{5}{2}\right] = \frac{1}{2}\times\frac{9}{2} = \frac{9}{4}$

$$2 < \frac{9}{4} < \frac{5}{2} < 3$$

पुनः $\frac{5}{2}$ और 3 के बीच परिमेय संख्या $= \frac{1}{2}\left[\frac{5}{2}+3\right] = \frac{1}{2}\times\frac{11}{2} = \frac{11}{4}$

$$2 < \frac{9}{4} < \frac{5}{2} < \frac{11}{4} < 3$$

अतः अभीष्ट परिमेय संख्या $= \mathbf{\frac{9}{4}, \frac{5}{2}, \frac{11}{4}}$. **उत्तर**

13. परिमेय संख्याएँ :

$$\sqrt{\frac{4}{9}} = \frac{\sqrt{4}}{\sqrt{9}} = \frac{2}{3} \left(\frac{p}{q} \text{ के रूप की है}\right)$$

$$\frac{22}{7} \left(\frac{p}{q} \text{ के रूप की है}\right)$$

$$3{\cdot}14 = \frac{314}{100} \left(\frac{p}{q} \text{ के रूप की है}\right)$$

$$\sqrt{1+\frac{9}{16}} = \sqrt{\frac{25}{16}} = \pm\frac{5}{4} \left(\frac{p}{q} \text{ के रूप की है}\right)$$

$= 14{\cdot}03737\ldots$ (आवर्त दशमलव भिन्न है)

अपरिमेय संख्याएँ :

$$= \pi \left(\frac{p}{q} \text{ के रूप में नहीं दर्शाया जा सकता है}\right)$$

$$\sqrt{18} = \pm 3\sqrt{2} \left(\frac{p}{q} \text{ के रूप में नहीं दर्शाया जा सकता है}\right)$$

14. $\because \frac{1}{7} = 0{\cdot}142857142857$........................

इस भागफल में संख्या 142857 की पुनरावृत्ति हो रही है, तब

$\frac{1}{7} = 0.\overline{142857}$

इसी प्रकार, $\frac{2}{7} = 0{\cdot}\overline{285714}$ है।

$\frac{1}{7}$ और $\frac{2}{7}$ के बीच की एक अपरिमेय संख्या ज्ञात करने के लिए, हम एक ऐसी संख्या ज्ञात करते हैं जो इन दोनों के बीच स्थित अनवसानी अनावर्ती होती है। इस प्रकार की आप अपरिमित रूप से अनेक संख्याएँ ज्ञात कर सकते हैं। इस प्रकार की संख्या का एक उदाहरण $0{\cdot}150150015000150000\ldots$ है।

15. $\sqrt{2}$ और $\sqrt{3}$ के बीच दो अपरिमेय संख्याओं $\sqrt{2.1}$ तथा $\sqrt{2.2}$ के मान असांत और अनावर्ती होंगे तथा $\sqrt{2} < \sqrt{2.1} < \sqrt{2.2} < 3$.

अतः $\sqrt{2}$ तथा $\sqrt{3}$ के बीच दो अपरिमेय संख्याएँ $\sqrt{2.1}$ तथा $\sqrt{2.2}$ हैं। **उत्तर**

16. नहीं, सभी धनात्मक पूर्णांकों के वर्गमूल अपरिमेय नहीं होते हैं, जैसे : 4, 9, 16, 25, 36, ... आदि धनात्मक पूर्णांक हैं, लेकिन इनके वर्गमूल एक अपरिमेय संख्या न होकर परिमेय संख्याएँ होती है; जैसे :

$\sqrt{4} = 2 =$ एक परिमेय संख्या

$\sqrt{9} = 3 =$ एक परिमेय संख्या, आदि।

17. $\sqrt{5}$ का मान ज्ञात करना :

$4 < 5 < 9$

$\therefore$ $2^2 < 5 < 3^2$ या $2 < \sqrt{5} < 3$

अब $4.84 < 5 < 5.29$ या $(2.2)^2 < 5 < (2.3)^2$

या $(2.2)^2 < \sqrt{5} < 2.3,$ (वर्गमूल लेने पर)

पुनः $(2.23)^2 < 5 < (2.24)^2$

या $2.23 < \sqrt{5} < 2.24,$ (वर्गमूल लेने पर)

पुनः $(2.236)^2 < 5 < (2.237)^2$

या $2.236 < \sqrt{5} < 2.237,$ (वर्गमूल लेने पर)

अतः $\sqrt{5} = 2.236 = 2.24$ (लगभग) **उत्तर**

$\sqrt{7}$ का मान ज्ञात करना :

$\because$ $4 < 7 < 9$ या $2^2 < 7 < 3^2$

या $2 < \sqrt{7} < 3$ (वर्गमूल लेने पर)

पुनः $6.76 < 7 < 7.29$ या $(2.6)^2 < 7 < (2.7)^2$

या $2.6 < \sqrt{7} < 2.7,$ (वर्गमूल लेने पर)

पुनः $6.9696 < 7 < 7.0225$ या $(2.65)^2 < 7 < (2.65)^2$

या $2.64 < \sqrt{7} < 2.65$ (वर्गमूल लेने पर)

पुन $6.996025 < 7 < 7.001316$

या $(2.642)^2 < 7 < (2.646)^2$

या $2.645 = \sqrt{7} < 2.646,$ (वर्गमूल लेने पर)

तब $\sqrt{7} = 2.645$

या $\sqrt{7} = 2.64$ (लगभग)। **उत्तर**

18. (i) $(3+\sqrt{3})(2+\sqrt{2}) = 3 \times 2 + 3\sqrt{2} + 2\sqrt{3} + \sqrt{6} = 6 + 3\sqrt{2} + 2\sqrt{3} + \sqrt{6}$.

(ii) $(3+\sqrt{3})(3-\sqrt{3}) = (3)(3) - (3)(\sqrt{3}) + 3\sqrt{3} - (\sqrt{3})(\sqrt{3}) = 9 - 3 = 6.$

19. (i) $(\sqrt{5}+\sqrt{2})^2 = (\sqrt{5})^2 + (\sqrt{2})^2 + (2)(\sqrt{5})(\sqrt{2})$

$= 5 + 2 + 2\sqrt{10} = 7 + 2\sqrt{10}$.

(ii) $(\sqrt{5}-\sqrt{2})(\sqrt{5}+\sqrt{2}) = (\sqrt{5})^2-(\sqrt{2})^2 = 5-2 = 3.$ उत्तर

20. (i) $9^{3/2} = (3 \times 3)^{3/2} = (3^2)^{3/2} = (3)^3 = 27.$ उत्तर

(ii) $(32)^{2/5} = (2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2)^{2/5} = (2^5)^{2/5} = (2)^2 = 4.$ उत्तर

21. (i) $2^{2/5} \cdot 2^{1/5} = 2^{2/5+1/5} = 2^{3/5}.$ उत्तर

(ii) $\left[\frac{1}{3^5}\right]^4 = \left(\frac{1}{3}\right)^{5\times4} = \left[\frac{1}{3}\right]^{20}$ उत्तर

22. (i) $(5+\sqrt{7})(2+\sqrt{5}) = 10+5\sqrt{5}+2\sqrt{7}+\sqrt{35}.$

(ii) $(5+\sqrt{5})(5-\sqrt{5}) = 5^2-(\sqrt{5})^2 = 25-5 = 20.$

(iii) $(\sqrt{3}+\sqrt{7})^2 = (\sqrt{3})^2+2\sqrt{3}\sqrt{7}+(\sqrt{7})^2 = 3+2\sqrt{21}+7 = 10+2\sqrt{21}.$

(iv) $(\sqrt{11}-\sqrt{7})(\sqrt{11}+\sqrt{7}) = (\sqrt{11})^2-(\sqrt{7})^2 = 11-7 = 4.$

*** निम्नलिखित में से प्रत्येक व्यंजक का मान दशमलव के तीन स्थानों तक ज्ञात कीजिए, जबकि दिया हो :**
$\sqrt{2} = 1.4141$, $\sqrt{3} = 1.732$, $\sqrt{5} = 2.236$ (लगभग), $\sqrt{10} = 3.162$ तथा $\sqrt{7} = 2.646$

23. $\frac{1}{\sqrt{5}}$ के अंश व हर में $\sqrt{5}$ से गुणा करने पर

$$= \frac{\sqrt{5}}{\sqrt{5}\times\sqrt{5}} = \frac{\sqrt{5}}{5} = \frac{2.236}{5} = \mathbf{0.447.}$$ उत्तर

24. $\frac{\sqrt{15}}{6} = \sqrt{\frac{5}{3}} = \sqrt{\frac{5\times2}{2\times2}} = \frac{\sqrt{10}}{2} = \frac{3.162}{2} = \mathbf{1.581.}$ उत्तर

25. $\frac{2-\sqrt{2}}{\sqrt{5}}$ के अंश व हर में $\sqrt{5}$ से गुणा करने पर

$$= \frac{2-\sqrt{2}}{\sqrt{5}}\times\frac{\sqrt{5}}{\sqrt{5}} = \frac{2\sqrt{5}-\sqrt{10}}{5} = \frac{2\times2.236-3.162}{5} = \frac{1.31}{5} = \mathbf{0.262.}$$ उत्तर

26. $\frac{\sqrt{10}-\sqrt{5}}{\sqrt{5}} = \frac{\sqrt{5}\times\sqrt{2}-\sqrt{5}}{\sqrt{5}} = \frac{\sqrt{5}(\sqrt{2}-1)}{\sqrt{5}} = \sqrt{2}-1 = 1.414-1 = 0.414.$ उत्तर

27. $\frac{4-\sqrt{5}}{\sqrt{10}}$ के अंश व हर को $\sqrt{10}$ से गुणा करने पर

$$\frac{4-\sqrt{5}}{\sqrt{10}}\times\frac{\sqrt{10}}{\sqrt{10}} = \frac{4\sqrt{10}-\sqrt{50}}{10} = \frac{4\sqrt{10}-5\sqrt{2}}{10} = \frac{4\times3.162-5\times1.414}{10}$$

$$= \frac{12.648-7.07}{10} = \frac{5.578}{10} = 0.5578 = \mathbf{0.558.}$$ उत्तर

28. $\frac{\sqrt{7}+1}{\sqrt{7}-1}$ के अंश व हर में $\sqrt{7}+1$ से गुणा करने पर

$$\frac{\sqrt{7}+1}{\sqrt{7}-1}\times\frac{\sqrt{7}+1}{\sqrt{7}+1}=\frac{(\sqrt{7}+1)^2}{(\sqrt{7})^2-1^2}=\frac{7+1+2\sqrt{7}}{7-1}=\frac{8+2\sqrt{7}}{6}=\frac{2(4+\sqrt{7})}{6}$$

$$=\frac{4+\sqrt{7}}{3}=\frac{4+2.646}{3}=\frac{6.646}{3}=2.2153=\mathbf{2.215.}$$ उत्तर

दीर्घ उत्तरीय प्रश्न :

1. (i) असत्य है, क्योंकि शून्य एक पूर्ण संख्या है परन्तु प्राकृत संख्या नहीं है।

(ii) सत्य है, क्योंकि प्रत्येक पूर्णांक m को $\frac{m}{1}$ के रूप में लिखा जा सकता है और इसलिए यह एक परिमेय संख्या है।

(iii) असत्य है, क्योंकि $\frac{3}{5}$ एक पूर्णांक नहीं है।

(iv) यह कथन सत्य है क्योंकि अपरिमेय और परिमेय संख्यायें मिलकर वास्तविक संख्याएँ बनती हैं। अतः प्रत्येक अपरिमेय संख्या वास्तविक संख्या होती है।

(v) यह कथन असत्य है क्योंकि संख्या रेखा पर सभी वास्तविक संख्यायें निरूपित की जा सकती हैं। यहाँ m एक प्राकृतिक संख्या है जो यह दर्शाती है कि $\sqrt{1}, \sqrt{2}, \sqrt{3}, \sqrt{4}, \ldots$ बिन्दु ही संख्या रेखा पर स्थित हैं तथा अन्य बिन्दु संख्या रेखा पर स्थित नहीं होने चाहिये। जबकि वास्तविक यह है कि दी हुई किन्हीं दो क्रमिक संख्याओं को निरूपित करने वाले बिन्दुओं के बीच विस्तृत अन्तराल होता है; जैसे: $\sqrt{2}=1.414$ तथा $\sqrt{3}=1.732$ तब 1.414 तथा 1.732 के बीच पड़ने वाली संख्याओं को भी संख्या रेखा पर स्थान प्राप्त होता है। इसके अतिरिक्त ऋणात्मक संख्यायें संख्या रेखा पर स्थित होती हैं। अतः संख्या रेखा पर प्रत्येक बिन्दु $\sqrt{m}$ द्वारा व्यक्त नहीं किया जा सकता जबकि m एक प्राकृत संख्या है।

(iv) यह कथन असत्य है, क्योंकि परिमेय संख्याओं और अपरिमेय संख्याओं के संग्रह से वास्तविक संख्याओं के समुच्चय का निर्माण होता है। अतः प्रत्येक परिमेय संख्या तो वास्तविक संख्या हो सकती है परन्तु प्रत्येक वास्तविक संख्या का अपरिमेय होना आवश्यक नहीं है।

2. प्रश्नानुसार, माना $a=1$ तथा $b=2$

अब 1 तथा 2 के मध्य की संख्या $=\frac{a+b}{2}=\frac{1+2}{2}=\frac{3}{2}$

अब 1 तथा $\frac{3}{2}$ के मध्य की संख्या $=\frac{1+\frac{3}{2}}{2}=\frac{\frac{2+3}{2}}{2}=\frac{5}{4}$

अब $\frac{3}{2}$ तथा 2 के मध्य की संख्या $=\frac{\frac{3}{2}+2}{2}=\frac{\frac{3+4}{2}}{2}=\frac{7}{4}$

$\frac{5}{4}$ तथा $\frac{3}{2}$ के मध्य की संख्या $=\frac{\frac{5}{4}+\frac{3}{2}}{2}=\frac{\frac{5+6}{4}}{2}=\frac{11}{8}$

$$\frac{3}{2} \text{ तथा } \frac{7}{4} \text{ के मध्य की संख्या } = \frac{\frac{3}{2}+\frac{7}{4}}{2} = \frac{\frac{6+7}{4}}{2} = \frac{13}{8}$$

अतः 1 तथा 2 के मध्य की 5 परिमेय संख्याएँ $\frac{3}{2}, \frac{5}{4}, \frac{7}{4}, \frac{11}{8}$ तथा $\frac{13}{8}$ हैं।

वैकल्पिक विधि एक अन्य विकल्प है कि एक ही चरण में सभी पाँच परिमेय संख्याओं को ज्ञात कर लें। क्योंकि हम पाँच संख्याएँ ज्ञात करना चाहते हैं, इसलिए हम 5 + 1 अर्थात् 6 को हर लेकर 1 और 2 को परिमेय संख्याओं के रूप में लिखते हैं। अर्थात् $1 = \frac{6}{6}$ और $2 = \frac{12}{6}$ हैं। तब आप यह देख सकते हैं कि $\frac{7}{6}, \frac{8}{6}, \frac{9}{6}, \frac{10}{6}$ और $\frac{11}{6}$ सभी 1 और 2 के बीच स्थित परिमेय संख्याएँ हैं।

टिप्पणी : व्यापक रूप में, **किन्हीं दो दी हुई परिमेय संख्याओं के बीच अपरिमित रूप से अनेक परिमेय संख्याएँ होती हैं।**

3. परिमेय संख्या $\frac{5}{7}$ का दशमलव निरूपण इस प्रकार है।

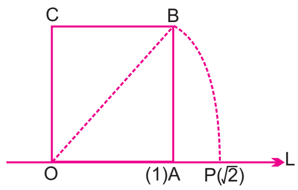
$$\therefore \quad \frac{5}{7} = 0.\overline{714285}$$

अत दूसरी संख्या $\frac{9}{11}$ का दशमलव निरूपण निम्नानुसार है :

$$\therefore \quad \frac{9}{11} = 0.\overline{81}$$

अब $\frac{5}{7} = 0.\overline{714285}$ तथा $= 0.\overline{81}$ के बीच अनेक अपरिमित संख्याओं को ज्ञात किया जा सकता है। उनमें से कोई तीन 0.75075007500075000075...., 0.767076700767000767... तथा 0.808008000800008...भी हो सकती हैं।

4. संख्या रेखा L पर मूल बिन्दु O से 1 इकाई की दूरी को भुजा मानकर $OABC$ एक वर्ग बनाया तथा OB को मिलायें।



ΔOAB में, $\quad OB^2 = OA^2 + AB^2 \quad$ (पाइथागोरस प्रमेय से)

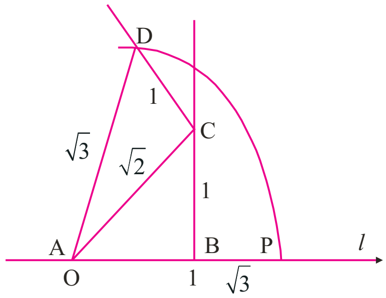
या

$$OB = \sqrt{OA^2 + AB^2}$$
$$= \sqrt{(1)^2 + (1)^2}$$
$$= \sqrt{1+1} = \sqrt{2}$$

O को केन्द्र मानकर OB = $\sqrt{2}$ त्रिज्या लेकर एक चाप खींचो जो संख्या रेखा L को P पर काटता है।

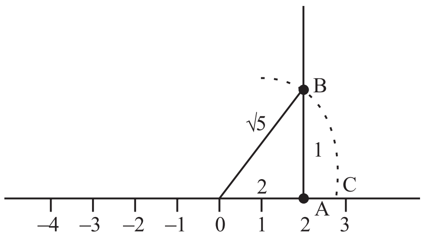
यही बिन्दु P संख्या रेखा पर $\sqrt{2}$ को निरूपित करता है।

5. संख्या रेखा l पर बिन्दु 0, 1, 2 लीजिए। बिन्दु O को A से और बिन्दु 1 को B से प्रकट करें। रेखा l के बिन्दु B पर एक रेखा खींचिए जो 1 पर लम्ब हो। इस लम्ब रेखा पर ऐसा बिन्दु C लीजिए कि BC = 1 इकाई लम्बाई। AC को मिलाइए। AC की लम्बाई (इकाइयों में) = $\sqrt{2}$; फिर AC के बिन्दु C पर लम्ब खींचिए और इस पर एक ऐसा बिन्दु D लीजिए कि CD = 1 हो। बिन्दुओं A और D को एक रेखाखण्ड से मिलाइए। तब AD = $\sqrt{3}$. अब A को केन्द्र मानकर और AD त्रिज्या लेकर वृत्त का एक चाप खींचिए जो l को बिन्दु P पर काटे, जैसा कि आकृति में नीचे दिखाया गया है। तब AP = $\sqrt{3}$ है। इस प्रकार संख्या रेखा l पर बिन्दु P, संख्या $\sqrt{3}$ का निरूपण करता है।



6. $\because$ $$5 = (2)^2 + 1$$

सर्वप्रथम एक संख्या रेखा खींचिए। संख्या रेखा पर O से $OA = 2$ मात्रक तथा $AB = 1$ मात्रक दूरी लेकर समकोण ΔOAB की रचना कीजिए।



पाइथागोरस प्रमेय से ΔAOB में,

$$OB = \sqrt{OA^2 + OB^2} = \sqrt{(2)^2 + (1)^2} = \sqrt{5}$$

परकार की सहायता से संख्या रेखा पर O को केन्द्र मानकर OB त्रिज्या का चाप लगाया है जो संख्या रेखा को C बिन्दु पर प्रतिच्छेद करता हैं। (लगभग)

$$OC = OB = \sqrt{5} = 2{\cdot}236$$

अत: बिन्दु C संख्या रेखा पर $\sqrt{5}$ को व्यक्त करता है।

7. $(3\sqrt{3}+2\sqrt{2})$ और $(3\sqrt{3}-2\sqrt{2})$ संयुग्मी करणी हैं।

$$\therefore \quad (3\sqrt{3}+2\sqrt{2})(3\sqrt{3}-2\sqrt{2}) = (3\sqrt{3})^2-(2\sqrt{2})^2 = 27-8 = 19$$

$$\therefore \quad \frac{3}{3\sqrt{3}-2\sqrt{2}}+\frac{4}{3\sqrt{3}+2\sqrt{2}} = \frac{3(3\sqrt{3}+2\sqrt{2})}{19}+\frac{4(3\sqrt{3}-2\sqrt{2})}{19}$$

$$= \frac{1}{19}[9\sqrt{3}+6\sqrt{2}+12\sqrt{3}-8\sqrt{2}]$$

$$= \frac{21}{19}\sqrt{3} - \frac{2}{19}\sqrt{2}$$

$\sqrt{3}$ और $\sqrt{2}$ के सन्निकट मान ऊपर के व्यंजक में प्रतिस्थापित करने पर हमें प्राप्त है,

$$\text{व्यंजक} = \frac{21}{19} \times 1.7321 - \frac{2}{19} \times 1.4142$$

$$= \frac{1}{19}[36.3741 - 2.8284]$$

$$= \frac{1}{19} \times 33.5457 = 1.7656$$

= 1.766 (दशमलव के 3 स्थानों तक शुद्ध)। **उत्तर**